5-маъруза

Мантиқ функцияларининг мантиқий элементлар ёрдамида ифодаланиши

Режа

1. Мантиқ алгебраси функция(МАФ)ларининг аналитик ифодаланиши.
2. МАФ нинг сонли ифодаланиши.
3. МАФ нинг геометрик ифодаланиши.
4. МАФнинг мантиқий схемалар ёрдамида ифодаланиши.

Юқорида мантиқий элементларни ифодалашда жадвал усулидан фойдаланган эдик. Жадвал усулида ўзгарувчилар қийматларининг ҳар бир тўпламига ҳақиқийлик жадвалида мантиқий функция қиймати тўғри келар эди. Бу усул ихтиёрий сонни ўзгарувчи функцияларини ёзишга имкон берсада, бундай ёзув МАФларни таҳлил этишда ихчам бўлмайди. Формула кўринишидаги аналитик ёзув соддароқ ҳисобланади.

Мантиқий алгебра функцияси берилган ўзгарувчиларнинг белгиланган тўплами $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ни кўрайлик. Ихтиёрий ўзгарувчи $x_i=\{0,1\}$ бўлганлиги сабабли ўзгарувчи қийматларининг тўплами аслида қандайдир иккили сондан иборат. Тўпламнинг тартиб рақами ихтиёрий иккили сон i деб фараз қилиб, қуйидагини оламиз

$$i=x_1\cdot 2^{n-1}+x_2\cdot 2^{n-2}+\ldots+x_{n-1}\cdot 2^1+x_n.$$

Айтайлик, қуйидаги $\Phi_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функция мавжуд:

$$\Phi_I=\begin{cases} 0, \text{ агар тўпламнинг тартиб рақами } i \text{ бўлса,} \\ 1, \text{ агар тўпламнинг тартиб рақами } i \text{ бўлмаса,} \end{cases}$$

Φ_i функция ***терм*** деб аталади.

Дизъюнктив терм (макстерм) - тўғри ва инверс шаклда ифодаланган барча ўзгарувчиларни дизъюнкция белгиси билан боғловчи терм (баъзи адабиётларда «нулнинг конституэнти» атамаси ишлатилади).

Масалан,

$\Phi_1= \bar{x}_1\vee x_2\vee x_3\vee x_4$,

$\Phi_2= x_1\vee \bar{x}_2$,

Конъюнктив терм (минтерм) - тўғри ва инверс шаклда ифодаланган барча ўзгарувчиларни конъюнкция белгиси билан боғловчи терм (баъзи адабиётларда «бирнинг конституэнти» атамаси ишлатилади).

Масалан,

$F_1=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$,

$F_2= \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$,

Терминг даражаси r термга кирувчи ўзгарувчилар сони билан аниқланади.

Масалан,

$F_1 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5$, минтерм учун $r=5$,

$\varPhi_1 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$, макстерм учун $r=3$,

Юқорида келтирилганларга асосланиб, қуйидаги теоремани таърифлаш мумкин:

Теорема. Жадвал кўринишида берилган ихтиёрий МАФ қуйидаги кўринишда аналитик ифодаланиши мумкин:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n = \bigvee_{i} F_i \qquad (7.1)$$

бу ерда i-функция 1 га тенг бўлган тўпламларнинг тартиб рақами; $\bigvee_{i}$ - 1 га тенг бўлган барча F_i термларни бирлаштирувчи дизъюнкция белгиси. Ҳақиқатан, қандайдир тўпламда функция $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)=1$ бўлса, $x \vee 1=1$ бўлганлиги сабабли (7.1) ифоданинг ўнг тарафида 1 га тенг бўлган элемент доимо топилади; агар i-тўпламда функция $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)=0$ бўлса, (3.8) ифоданинг ўнг тарафида битта ҳам 1 га тенг бўлган элемент топилмайди, чунки $0 \vee 0 \vee \ldots \vee 0=0$.

Шундай қилиб, $f_i=1$ бўлгандаги ҳар бир i-тўпламга $F_i=1$ бўлган элемент тўғри келади, $f_i=0$ бўлгандаги тўпламларга эса битта ҳам $F_i=1$ бўлган элемент тўғри келмайди. Шу сабабли, ҳақиқийлик жадвали (7.1) кўринишидаги аналитик ёзув орқали бир қийматли акслантирилади. (7.1) ифодани ***термларнинг бирлаштирилиши*** деб юритилади.

Ўзгарувчан даражали минтермларни ўз ичига олувчи термлар бирлашмаси ***дизъюнктив нормал шакл***(ДНШ) деб аталади.

Теорема. Жадвал кўринишида берилган ихтиёрий МАФ қуйидаги кўринишида аналитик ифодаланиши мумкин:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varPhi_1 \wedge \varPhi_2 \wedge \ldots \wedge \varPhi_к , \qquad (7.2)$$

бу ерда $к$ - $f=0$ бўлгандаги иккили тўпламлар сони.

Ўзгарувчан даражали макстермларни ўз ичига олувчи термлар бирлашмаси ***конъюнктив нормал шакл*** (КНШ) деб юритилади.

(7.2) теоремадан қуйидаги хулоса келиб чиқади: жадвал кўринишида берилган ихтиёрий МАФ кўйидаги аналитик шаклда ифодаланиши мумкин:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varPhi_1 \equiv \varPhi_2 \equiv \ldots \equiv \varPhi_к ,$$

бу ерда $к$ - функциянинг нуллик қийматлари сони.

Минтермлар (макстермлар) асосида МАФ ларнинг каноник дизъюнктив (конъюнктив) шакллари тузилади.

ДНШ (КНШ) каноник дейилади, агар уларнинг барча элементар конъюнкциялари (дизъюнкциялари) минтермлар (макстермлар) бўлса. Ҳар қандай МАФ фақат битта дизъюнктив каноник шаклга (ДКШ) ва фақат битта конъюнктив каноник шаклга (ККШ) эга бўлади. Каноник шакллар ***мукаммал каноник шакллар*** деб ҳам аталади.

МАФ нинг мукаммал дизъюнктив нормал шакли (МДНШ) ва мукаммал конъюнктив нормал шакли (МКНШ) мос ҳақиқийлик жадваллар ёрдамида тузилиши мумкин.

МДНШ - МАФ нинг қиймати 1 га тенг бўлган тўпламларга мос келувчи минтермлар дизъюнкциясидир.

Масалан,6.10 - жадвалда келтирилган функцияга қуйидаги МДНШ мос келади:

$f=\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$

МКНШ ҳақиқийлик жадвали ёрдамида қуйидагича аниқланади. Функциянинг қиймати 0 га тенг бўлган тўпламларнинг ҳар бири учун макстерм аниқланади. Бунда тўпламдаги 0 қийматли ўзгарувчига ўзгарувчининг ўзи мос келса, 1 қийматли ўзгарувчига ўзгарувчининг инкори мос келади.

Масалан, 6.10-жадвалдаги функцияга қуйидаги МКНШ тўғри келади:

$f=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Демак, мукаммал нормал шаклнинг нормал шаклдан фарқи, ундаги термлар фақат максимал даражага эга бўлиши ва функцияни бир қийматли ифодалашга имкон беришидир.

Ихтиёрий дизъюнктив нормал шаклга ўтиш қуйидагича амалга оширилади:

айтайлик, $f_{ДНШ}=F_1$ бўлсин. Унда

$$f_{ДНШ}=F_1 x_1 \vee F_1 \bar{x}_i, \qquad (7.3)$$

бу ерда x_i - берилган F_1 термга кирмайдиган ўзгарувчи.

Мисол. Қуйидаги ДНШ да берилган мантиқий функцияни МДНШ га ўтказиш лозим:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\underbrace{x_1 \bar{x}_2}_{F_1} \vee \underbrace{x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4}_{F_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4}_{F_3} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_3 x_4}_{F_4}$

*Ечиш***.** (7.3) ўзгартиришни навбат билан барча термларга қўллаймиз

$F_1= x_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_3)= x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

Олинган ифодадаги иккала ҳадни $(x_4 \vee \bar{x}_4)$ га кўпайтирамиз. Натижада қуйидагини оламиз:

$F_1=(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)(x_4 \vee \bar{x}_4)= x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$.

Худди шундай

$F_2= x_2 \bar{x}_3 x_4 (x_1 \vee \bar{x}_1)= x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$;

$F_3= \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 (x_2 \vee \bar{x}_2)= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$.

Соддалаштиришдан сўнг қуйидагини оламиз:

$f_{МДНШ}(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee$
$\vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$.

Агар функциянинг максимал даражаси r га, j-нчи терминнинг минимал даражаси k га тенг бўлса (7.3) ўзгартиришни r-k марта қўллаш зарур.

Ихтиёрий конъюнктив нормал шаклдан мукаммал конъюнктив нормал шаклга ўтиш қуйидагича амалга оширилади.

Айтайлик, $f_{КНШ}=\Phi_1$. Унда

$$f_{КНШ}=\Phi_1 \vee x_i \bar{x}_i=(\Phi_1 \vee x_i)(\Phi_1 \vee \bar{x}_i) \qquad (7.4)$$

Мисол. Қуйидаги КНШ да берилган мантиқий функцияни МКНШ га ўтказиш лозим.

$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1 \vee x_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$.

Ечиш. (7.4) ўзгартиришни навбат билан $Ф_1$ ва $Ф_2$ термларга қўллаймиз.

$Ф_1=(x_1 \vee x_2)\vee x_3 \bar{x}_3 =(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$;

$Ф_2=(x_2 \vee \bar{x}_3)\vee x_1 \bar{x}_1 =(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$.

Соддалаштиришдан сўнг қуйидагини оламиз:

$$f_{\text{МДНШ}}(x_1, x_2, x_3)= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3).$$

Нормал шаклларда ифодалашда элементар функцияларнинг чегараланган сонидан фойдаланилади. Масалан, МДНШ учун элементар функциялар сифатида «конъюнкция», «дизъюнкция» ва «инкор» ишлатилади. Демак, ихтиёрий мураккабликка эга бўлган мантиқий функцияларни аналитик ифодаловчи мантиқ алгебраси функциялари тизимси мавжуд. Рақамли автоматларни лойиҳалаш худди шундай функциялар тизимсига асосланади.

Таъриф. Мантик алгебраси функцияларининг функционал тўлиқ тизимси – ***базис*** деб шундай мантиқий функциялар мажмуасига айтиладики, бу мажмуа ёрдамида ихтиёрий мантиқий функцияни ифода кўринишида ёзиш имкони бўлсин.

Базисга қуйидаги функциялар тизимси киради: ВА, ЁКИ, ЭМАС (1-базис); ВА, ЭМАС (2-базис); ЁКИ, ЭМАС (3-базис); Шеффер штрихи (4-базис); Пирс стрелкаси (5-базис). Базислар ортиқчалик (1-базис) ва минимал (4, 5-базислар) бўлиши мумкин.

1-базис ортиқчалик тизим ҳисобланади, чунки ундан бирор-бир функцияни чиқариб ташлаш мумкин. Масалан, де Морган қонунидан фойдаланиб ВА функциясини ЁКИ ва ЭМАС функциялари ёки ЁКИ функциясини ВА ва ЭМАС функциялари билан алмаштириш мумкин.

Агар ифодалашнинг турли шакллари минималлик нуқтаи назаридан таққосланса, равшанки, нормал шакллар мукаммал нормал шаклларга қараганда тежамли ҳисобланади. Аммо, нормал шакллар бир қийматли акслантиришни бермайди.

МАФ ларнинг сонли ифодаланиши.

Мантиқ алгебраси функцияларининг ёзилишини соддалаштириш мақсадида термларни тўлиқ санаб ўтиш ўрнига функция 1 қийматини (МДНШ учун) ёки 0 қийматини (МКНШ учун) қабул қилувчи тўпламлар тартиб рақамидан фойдаланилади. Масалан, 10-жадвалда келтирилган функция қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$f(x_1, x_2, x_3)= 3\vee 5\vee 6\vee 7= \vee(3, 5, 6, 7)$$

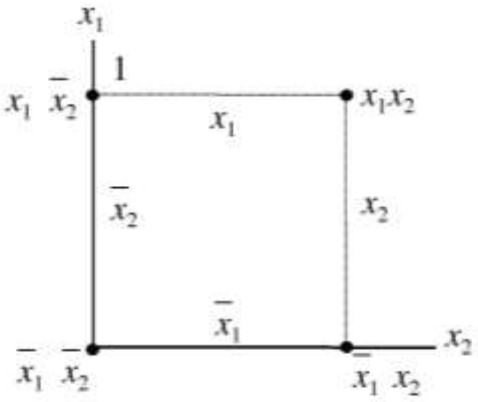
яъни функция фақат 3, 5, 6, 7-тўпламларда бирлик қийматига эга. Ёки

$$f(x_1, x_2, x_3)=0\wedge 1\wedge 2\wedge 4= \wedge(0, 1, 2, 4)$$

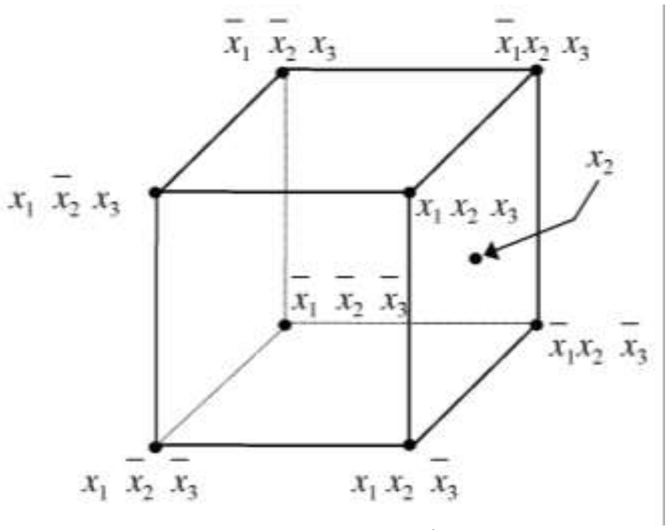
яъни, функция фақат 0, 1, 2, 4-тўпламларда ноллик қийматига эга.

МАФ ларнинг геометрик ифодаланиши.

Мантиқий функциялар устида бажариладиган кўпгина ўзгартиришларни, уларнинг геометрик кўринишидан фойдаланиб изоҳлаш қулай ҳисобланади. Масалан, икки ўзгарувчили функцияни x_1, x_2 координаталар тизимсида берилган қандайдир текислик каби изоҳлаш мумкин (7.1-расм). Ҳар бир ўқ бўйича x_1 ва x_2 нинг бирлик кесмаларини белгиласак, учлари ўзгарувчилар комбинацияларига мос келувчи квадрат ҳосил бўлади.



7.1-расм. Икки ўзгарувчили функциянинг геометрик ифодаси



7.2-расм Уч ўзгарувчили функциянинг геометрик ифодаси

Икки аргументли функциянинг бундай кўринишидан хулоса қилиш мумкинки, ягона қиррага тааллуқли қўшнилар деб аталувчи иккита уч шу қирра бўйлаб ўзгарувчи ўзгарувчилар бўйича бириктирилади. Демак, учта ўзгарувчи функцияси учун минтермларни ***бириктириш қоидасини*** қуйидагича ёзиш мумкин:

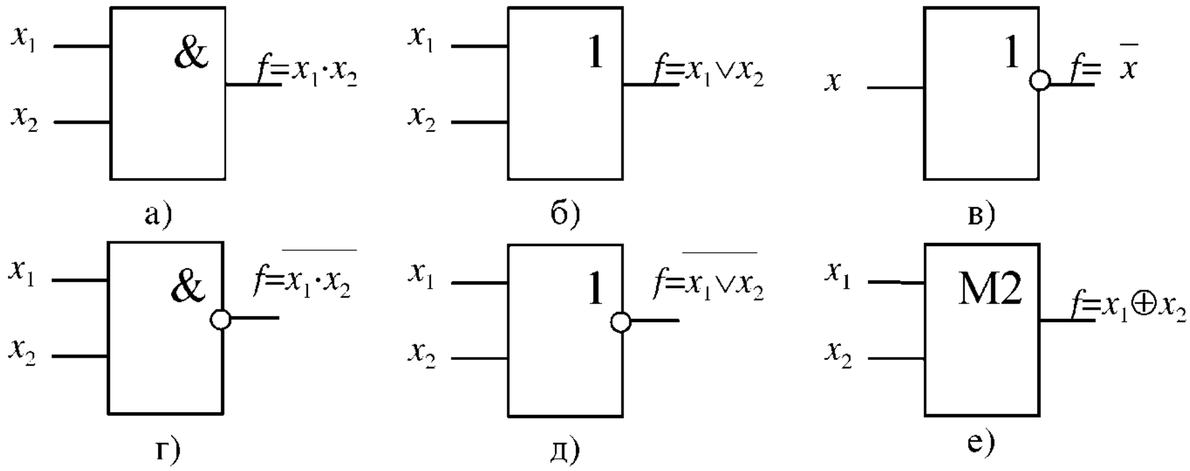
$$x_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3 \vee x_1\ \bar{x}_2\ x_3 = x_1\ \bar{x}_2.$$

Учта ўзгарувчили функцияларнинг геометрик ифодаси куб кўринишида бўлади (7.2-расм). Куб қирралари учларни сингдиради. Куб ёнлари ўз қирраларини, демак, учларини сингдиради.

Геометрик нуқтаи назаридан ҳар бир $x_1\ x_2\ x_3\ ...\ x_n$ тўпламни n-ўлчовли фазодаги нуқтани аниқловчи n-ўлчамли вектор сифатида кўриши мумкин. Шу сабабли, n ўлчамли функция аниқланган барча тўпламлар тўплами n-ўлчамли кубнинг учлари кўринишида ифодаланади. Куб учларининг координаталари функция ёзувидаги ўзгарувчилар келтирилган тартибга мос тартибда кўрсатилиши шарт. Функция бирлик қийматини қабул қилувчи учларни нуқталар билан белгилаб МНФ нинг геометрик ифодаси ҳосил қилинади.

МАФ ларнинг мантиқий схемалар ёрдамида ифодаланиши.

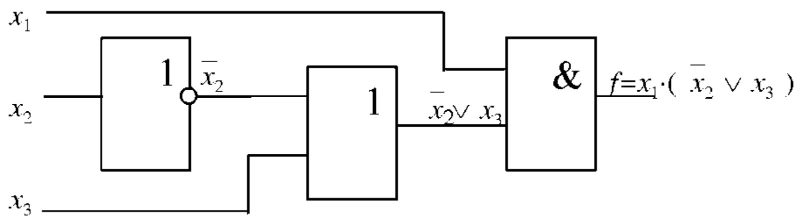
Аргументлар устида бажариладиган мантиқий амалларни комбинацион схемалар деб аталувчи мантиқий схемалар ёрдамида ифодалаш мумкин. 7.3-расмда асосий мантиқий амалларни ифодаловчи мантиқий элементлар тизимси келтирилган.



7.3-расм. Мантиқий элементлар тизимси.
а) «ҲАМ» элементи, конъюнктор; б) «ЁКИ» элементи, дизъюнктор;
в) «ЭМАС» элементи, инвертор; г) Шеффер элементи;
д) Пирс элементи; е) 2 нинг модули бўйича қўшиш элементи.

Ушбу мантиқий схемалар ёрдамида ихтиёрий мураккаб МАФ ни ифодаловчи комбинацион схемани тузиш мумкин.

Мисол. $f=x_1\cdot(\overline{x}_2 \vee x_3)$ функция учун комбинацион схема 7.4-расмда келтирилган.



7.4-расм. $f=x_1\cdot(\overline{x}_2 \vee x_3)$ функциянинг комбинацион схемаси.

Таянч иборалар

Функционал тўлиқ тизим**,**каноник шакл, бирламчи терм, макстерм, минтерм, 1 конституентаси, 0 конституентаси, дизъюнктив нормал шакл, мукаммал дизъюнктив нормал шакл, конъюнктив нормал шакл, мукаммал конъюнктив нормал ш**акл,** мантиқий функцияни геометрик ифодалаш, МАФни сонли ифодалаш, мантиқий счхема Билан ифодалаш, МАФни график ифодалаш (Карно карталари).

Назорат саволлари

1. Мантиқ алгебраси функцияларининг аналитик ифодаси.
2. Термлар (конституенталар) нима?
3. Минтерм ва макстерм нима?

4. Терманинг даражаси нима?
5. Дизъюнктив нормал шакл (ДНШ) ва конъюнктив нормал шакл (КНШ) нима?
6. Мукаммал дизъюнктив нормал шакл (МДНШ) ва мукаммал конъюнктив нормал шакл (МКНШ) нима?
7. Ихтиёрий ДНШ ва КНШдан МДНШ ва МКНШга қандай ўтилади?
8. Мантиқ алгебраси функцияларининг функционал тўлиқ тизимси нима?
9. Мавжуд базисларни санаб ўтинг.
10. Мантиқ алгебраси функцияларининг сонли ифодаланиши.
11. Мантиқ алгебраси функцияларининг геометрик ифодаланиши.
12. Мантиқ алгебраси функцияларининг мантиқий схемалар ёрдамида ифодаланиши