4-маъруза
Мантиқ алгебраси умумий тушунчалари
Режа

1. Мантиқ, мантиқий ўзгарувчилар ва функциялар тушунчалари ҳамда таърифлари.
2. Бир ва икки аргументли мантиқ функциялари.
3. Мантиқ алгебраси элементар функцияларининг хусусиятлари.

Математик мантиқнинг асосий қисмларидан бири - **мантиқ алгебраси** ҳисоблаш машиналарининг асоси ҳисобланади**.** Мантиқ алгебраси фикрлар билан иш кўради. **Фикр** деганда ҳақиқий ёки ёлғонлиги нуқтаи назаридан билдирилган ҳар қандай тасдиқ тушунилади. Фикрнинг ҳақиқийлиги ёки ёлғонлигидан бошқа аломатлари (яхши, ёмон, нодир ва ҳ.) эътиборга олинмайди.

Мантиқ алгебрасида фикрларнинг ҳақиқийлиги 1 билан, ёлғонлиги 0 билан тенглаштириш қабул қилинган. Фикрларнинг бу иккили табиатига мослигини ҳисобга олиб, уларни ***мантиқий ўзгарувчилар*** деб аташади. Фикрлар ёки мантиқий ўзгарувчилар *оддий* бўлади ва лотин алифбосининг кичик ҳарфлари - x, y, z, x_1, x_2, a, b, . . . билан белгиланади.

Оддий фикрлардан мантиқий ўзгарувчиларнинг иккили функциялари ҳисобланувчи *мураккаб фикрлар* тузилади. Мураккаб фикрлар катта ҳарфлар A, B, C, D, E, F, ... билан белгиланади ва кўпинча ***мантиқ алгебрасининг функцияси*** (МАФ) деб аталади.

Мантиқ алгебраси элементар мантиқий функциялар ёрдамида мантиқ алгебраси функцияларини ифодалаш ва ўзгартириш билан шуғулланади. МАФ ларини ифодалаш ва ўзгартириш масалалари ҳисоблаш машиналарини лойиҳалашда кенг қўлланилади.

Элементар мантиқий функциялар қаторига аввало битта ўзгарувчи x нинг элементар функцияларини киритиш мумкин. Бу функциялар ***ҳақиқийлик жадвали*** деб аталувчи жадвалда келтирилган (6.1-жадвал). Умуман, ҳақиқийлик жадвали аргументларнинг (мантиқий ўзгарувчиларнинг) мумкин бўлган тўпламларидан ҳар бирига мос функция қийматини акслантиради.

6.1-жадвал.

Функция	x аргументли функция қиймати		Функция белгиси	Функция номи
	0	1		
f_0	0	0	0	доимо ёлғон
f_1	0	1	x	ўзгарувчи
f_2	1	0	$\bar{x}$	инкор
f_3	1	1	1	доимо

				ҳақиқий

Иккита x ва y ўзгарувчиларнинг элементар мантиқий функцияларини кўрайлик (6.2-жадвал).

6.2-жадвал

Функция	xy аргументли функция қиймати				Функция белгиси	Функция номи
	00	01	10	11		
f_0	0	0	0	0	0	доимо ёлғон
f_1	0	0	0	1	$x \wedge y$	конъюнкция
f_2	0	0	1	0	$x\bar{y}$	y бўйича таъқиқ
f_3	0	0	1	1	x	x доимо ҳақиқий
f_4	0	1	0	0	$\bar{x}y$	x бўйича таъқиқ
f_5	0	1	0	1	y	y доимо ҳақиқий
f_6	0	1	1	0	$x \oplus y$	x ва y ни 2 нинг модули бўйича қўшиш
f_7	0	1	1	1	$x \vee y$	дизъюнкция
f_8	1	0	0	0	$x \uparrow y$	Пирс стрелкаси
f_9	1	0	0	1	$x \sim y$	тенг қийматлилик
f_{10}	1	0	1	0	$\bar{y}$	y доимо ёлғон
f_{11}	1	0	1	1	$x \to y$	импликация
f_{12}	1	1	0	0	$\bar{x}$	x доимо ёлғон
f_{13}	1	1	0	1	$y \to x$	импликация
f_{14}	1	1	1	0	x/y	Шеффер штрихи
f_{15}	1	1	1	1	1	доимо ҳақиқий

6.2-жадвалдаги функциялардан бир қисми тривиал ҳисобланади. Масалан, $f_0=0$, $f_{15}=1$ ва $f_3=x$, $f_5=y$. Уларнинг ичида иккитаси элементар функциялардир - $f_{10}=\bar{y}$, $f_{12}=\bar{x}$. f_2 ва f_4 функциялари эса мос ҳолда y ва x бўйича таъқиқи функциялари ҳисобланади.

Қолганларини қисқача тавсифлайлик:

- x ва y мантиқий ўзгарувчиларнинг ***дизъюнкцияси***. Қисқача x ва y нинг дизъюнкцияси. $x \vee y$ каби белгиланади. «x ёки y» деб ўқилади. Таърифи: x ва y мантиқий ўзгарувчиларнинг дизъюнкцияси мураккаб функция бўлиб, у фақат x ва y ёлғон бўлгандагина ёлғон ҳисобланади (6.3-жадвал).

- x ва y мантиқий ўзгарувчиларнинг ***конъюнкцияси***. $x \wedge y$ каби белгиланади. «x ҳам y» деб ўқилади. Таърифи: x ва y нинг конъюнкцияси мураккаб функция бўлиб, у фақат x ва y ҳақиқий бўлгандагина ҳақиқий ҳисобланади (6.4-жадвал).

6.3-жадвал

$0 \vee 0 = 0$
$0 \vee 1 = 1$
$1 \vee 0 = 1$
$1 \vee 1 = 1$

6.4-жадвал

$0 \wedge 0 = 0$
$0 \wedge 1 = 0$
$1 \wedge 0 = 0$
$1 \wedge 1 = 1$

- x ва y мантиқий ўзгарувчиларнинг ***тенг қийматлилиги***. $x \sim y$ каби белгиланади. «x y га тенг қийматлик» деб ўқилади. Таърифи: x ва y нинг тенг қийматлилиги мураккаб функция бўлиб, у фақат x ва y ҳақиқийликлари мос келгандагина ҳақиқий ҳисобланади (6.5-жавдал).

- x ва y ни ***2 нинг модули бўйича қўшиш***. $x \oplus y$ каби белгиланади. «x ни y га 2 нинг модули бўйича қўшиш» деб ўқилади. Таърифи: x ва y ни 2 нинг модули бўйича қўшиш мураккаб функция бўлиб, у фақат x ва y нинг ҳақиқийликлари мос келмаганда ҳақиқий ҳисобланади (6.6-жадвал). Баъзи адабиётларда бу функцияни ***тенг қийматлиликнинг инкори*** деб ҳам аташади.

6.5-жадвал

$0 \sim 0 = 1$
$0 \sim 1 = 0$
$1 \sim 0 = 0$
$1 \sim 1 = 1$

6.6-жадвал

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

- x ва y нинг ***импликацияси***. $x \rightarrow y$ каби белгиланади. «Агар x, унда y» деб ўқилади. Таърифи: x ва y нинг импликацияси мураккаб функция бўлиб, у фақат x ҳақиқий, y ёлғон бўлгандагина ёлғон ҳисобланади (6.7-жадвал). таъкидлаш лозимки, импликация сабаб ва оқибат орасидаги боғланиш маъносига эга эмас, яъни x нинг ҳақиқийлигидан y нинг ҳақиқийлик шарти келиб чиқмайди. Аксинча, импликация ёрдамида тузилган мураккаб фикрнинг ҳақиқийлиги учун x нинг ёлғонлиги кифоя. f_{13} функция $y \rightarrow x$ га мос келади.

- x ва y нинг ***Шеффер штрихи***. x/у каби белгиланади. «x штрих y» деб ўқилади. Таърифи: x ва y нинг Шеффер штрихи мураккаб функция бўлиб, у фақат x ва y ҳақиқий бўлгандагина ёлғон ҳисобланади (6.8-жадвал).

- x ва y нинг ***Пирс стрелкаси***. $x \uparrow y$ каби белгиланади. «x Пирс стрелкаси y» деб ўқилади. Таърифи: x ва y нинг Пирс стрелкаси мураккаб функция бўлиб, у фақат x ва y ёлғон бўлгандагина ҳақиқий ҳисобланади (6.9-жадвал).

6.7-жадвал

$0 \rightarrow 0 = 1$
$0 \rightarrow 1 = 1$

6.8-жадвал

$0/0 = 1$
$0/1 = 1$

6.9-жадвал

$0 \uparrow 0 = 1$
$0 \uparrow 1 = 0$

$1\to 0=0$ $1\to 1=1$	$1/0=1$ $1/1=0$	$1\uparrow 0=0$ $1\uparrow 1=0$

Юқорида кўрилган элементар мантиқий функциялар ёрдамида ихтиёрий МАФни тавсифлаш мумкин.

6.10-жадвалда учта ўзгарувчили мантикий функция учун ҳақиқатлик жадвали келтирилган.

6.10-жадвал

Тўплам тартиб рақами	x_1, x_2, x_3 тўпламлари	f функция қиймати
0	000	0
1	001	0
2	010	0
3	011	1
4	100	0
5	101	1
6	110	1
7	111	1

Мантиқ алгебраси элементар функцияларининг хусусиятлари

6.2-жадвалдан кўриниб турибдики, элементар функциялар ўзаро маълум боғланишларга эга. Бу боғланишларни ҳамда элементар функцияларнинг хусусиятларини кўриб чиқайлик.

Конъюнкция, дизъюнкция, инкор (ВА, ЁКИ, ЭМАС) функциялари. Мантиқ алгебрасининг асосий қоидаларидан фойдаланиб, қуйидаги аксиомаларнинг ўринли эканлигига қаноат ҳосил қилиш мумкин. Айтайлик, x - бирор бир мантиқий функция. Унда

1) $x=\overline{\overline{x}}$, мантиқий ифодадан барча қўшалоқ инкорга эга бўлган ҳадларни чиқариб ташлаб, уларни дастлабки қиймат билан алмаштириш имконияитини билдиради;

2) $\left.\begin{array}{l} x\vee x=x \\ x\cdot x=x \end{array}\right\}$, бундай ўзгартириш қоидалари мантиқий ифода узунлигини қисқартиришга имкон беради;

3) $x\vee 0=x$; 4) $x\vee 1=1$; 5) $x\cdot 0=0$; 6) $x\cdot 1=1$; 7) $x\cdot\overline{x}=0$; 8) $x\vee\overline{x}=1$ (мантиқий ҳақиқийлик).

Дизъюнкция ва конъюнкция арифметикадаги кўпайтириш амалларига ўхшаш қатор хусусиятларга эга:

1) ассоциативлик хусусияти (уйғунлашиш қонуни):

$x\vee(y+z)=(x+y)+z$,

$x(yz)=(xy)z$

2) коммутативлик хусусияти (кўчириш қонуни):

$x\vee y=y\vee x$,

$xy=yx$;

3) дистрибутивлик хусусияти (тақсимланиш қонуни):

дизъюнкцияга нисбатан конъюнкция учун

$x(y\vee z)=xy\vee xz$,

конъюнкцияга нисбатан дизъюнкция учун

$x\vee yz=(x\vee y)(x\vee z)$

Бу хусусиятларнинг ўринли эканлигини юқоридаги аксиомалардан фойдаланиб исботлаш айтарлича қийин эмас.

Де Морган қонунлари сифатида маълум қуйидаги муносабатларнинг ҳақиқатлигини ҳам кўрсатиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\overline{xy}&=\bar{x}\vee\bar{y};\\ \overline{x\vee y}&=\bar{x}\bar{y}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.1)$$

Бу қонундан қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}xy&=\overline{\bar{x}\vee\bar{y}};\\ x\vee y&=\overline{\bar{x}\bar{y}}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.2)$$

демак, конъюнкцияни дизъюнкция ва инкор орқали ёки дизъюнкцияни конъюнкция ва инкор орқали ифодалаш мумкин.

Мантиқий функциялар учун сингдириш қонуни сифатида маълум қуйидаги муносабатлар ўрнатилган:

$$\left.\begin{aligned}x\vee(xy)&=x,\\ x(x\vee y)&=x;\end{aligned}\right\}\qquad(6.3)$$

2 нинг модули бўйича қўшиш функцияси қуйидаги хусусиятларга эга:

коммутативлик (кўчириш қонуни)

$x\oplus y=y\oplus x$;

ассоциативлик (уйғунлашиш қонуни)

$x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$;

дистрибутивлик (тақсимланиш қонуни)

$x(y\oplus z)=(xy)\oplus(xz)$.

Бу функция учун қуйидаги аксиомалар ўринли:

$x\oplus x=0$; $x\oplus 1=\bar{x}$;

$x\oplus\bar{x}=1$; $x\oplus 0=x$.

Аксиомалар ва хусусиятлардан фойдаланиб ВА, ЁКИ, ЭМАС функцияларни 2 нинг модули бўйича қўшиш функцияси орқали ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=x\oplus 1;\\ x\vee y&=x\oplus y\oplus xy\\ x\cdot y&=(x\oplus y)\oplus(x\vee y).\end{aligned}\right\}\qquad(6.4)$$

Импликация функцияси учун қуйидаги аксиомалар ўринли:

$x\to x=1$; $x\to\bar{x}=\bar{x}$;

$x\to 1=1$; $1\to\bar{x}=x$;

$x\to 0=\bar{x}$; $0\to x=1$.

Аксиомалардан кўриниб турибдики, импликация фақат кўриниши ўзгарган коммутативлик (кўчириш қонуни) хусусиятига эга

$x \to y = \overline{y} \to \overline{x}.$

Бу функция учун ассоциативлик хусусияти ўринсиздир.

ВА, ЁКИ, ЭМАС функциялари импликация функцияси орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} & x \vee y = \overline{x} \to y; \\ & xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{x \to \overline{y}}; \\ & \overline{x} = x \to 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

Шеффер штрихи функцияси учун қуйидаги аксиомалар ўринли:

$x/x = \overline{x}$; $x/1 = \overline{x}$;

$x/\overline{x} = 1$; $\overline{x}/0 = 1$;

$x/0 = 1$; $\overline{x}/1 = x$.

Шеффер штрихи функцияси учун фақат коммутативлик (кўчириш қонуни) ўринлидир:

$x/y = y/x,$

ВА, ЁКИ, ЭМАС функциялари Шеффер штрихи функцияси орқали қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} & xy = \overline{x / y} = x / y / x / y; \\ & \overline{x} = x / x; \\ & x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}} = \overline{x} / \overline{y} = x / x / y / y. \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

Пирс стрелкаси функцияси учун қуйидаги аксиомалар ўринли:

$x \uparrow x = \overline{x}$; $x \uparrow 0 = \overline{x}$;

$x \uparrow \overline{x} = 0$; $x \uparrow 1 = 0$.

Пирс стрелкаси функцияси учун фақат коммутативлик (кўчириш қонуни) хусусияти ўринли:

$x \uparrow y = y \uparrow x.$

ВА, ЁКИ, ЭМАС функцияларини Пирс стрелкаси функцияси орқали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} & xy = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y); \\ & x \vee y = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y); \\ & \overline{x} = x \uparrow x. \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

Таянч иборалар

Мантиқ, мантиқий алгебра, Бул ёки мантиқий ўзгарувчилар, мантиқий функция, содда ва мураккаб фикр, мантиқий амаллар, ҳақиқатлик жадвали, мантиқий функциялар суперпозицияси.

Назорат саволлари

1. Мантиқ алгебараси нимани ўрганади?
2. Мантиқий функциянинг ҳақиқийлик жадвали нима?
3. Икки ўзгарувчининг элементар мантиқий функцияларини санаб ўтинг.

Мантиқ алгебрасининг асосий аксиомалари ва қоидалари