ЛЕКЦІЯ 11. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

11.1. Метод Ойлера

1. Розгляньмо задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку:

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0,$$

де x_0 та y_0 задані і припустімо, що ця задач має єдиний розв'язок в інтервалі $(a;b) \ni x_0$.

Розвиньмо методи, які дозволяють знаходити наближені значення розв'язку $y(x)$ у точках

$$x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots,$$

де h — розміру кроку — фіксоване число. Ці методи називають покрокові; вони використовують ті самі формули на кожному кроці.

Формули ці зв'язані з рядом Тейлора:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y'' + \ldots. \tag{11.1}$$

Формула (11.1) виражає ключову ідею, що дозволяє розвинути метод Ойлера та покращений метод Ойлера (метод Гойна).

2. Метод Ойлера. Для малих h вищі степені $h^2, h^3, \ldots$ є малими. Відкидання всіх доданків із цими степенями дає грубе наближення:

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) = \\ = y(x) + hf(x,y),$$

і відповідно метод Ойлера (метд Ойлера — Коші):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \ n = 0,1,2,\ldots$$

Геометрично, це є наближенням кривої $y(x)$ ламаною, перша ланка якою є дотичною до кривої в точці x_0 (рис. 11.1).

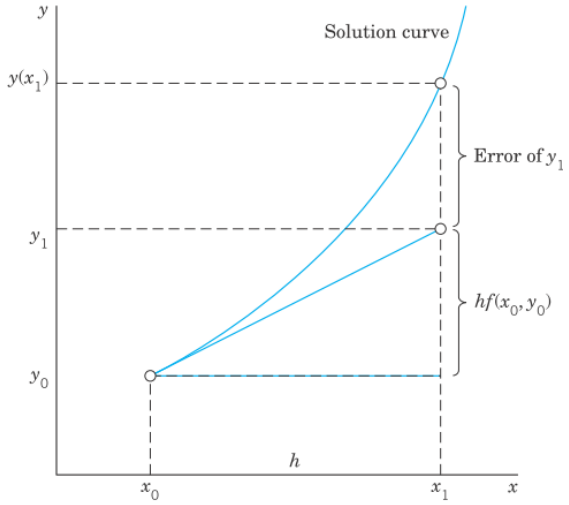

Рис. 11.1

3. Розв'яжімо задачу Коші:

$$y' = x + y, y(0) = 0,$$

методом Ойлера з $n = 5$ кроками розміром $h = 0{,}2$. На рис. 11.3 подано графік точного розв'язку $y = e^x - x - 1$ і значення наближеного розв'язку. Як бачимо розв'язок вельми неточний.

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	Error
0	0.0	0.000	0.000	0.000
1	0.2	0.000	0.021	0.021
2	0.4	0.04	0.092	0.052
3	0.6	0.128	0.222	0.094
4	0.8	0.274	0.426	0.152
5	1.0	0.488	0.718	0.230

Зменшення h покращить результати, але вимагатиме невиправданого обсягу обчислень.

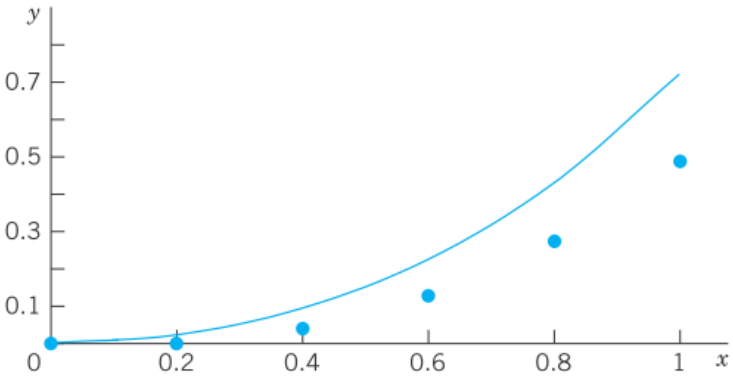

Рис. 11.2.

4. Похибка методу Ойлера. Запишімо формулу Тейлора 2-го порядку із залишковим членом у формі Лаґранжа:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi),$$

де $x \le \xi \le x+h$. Це показує, що в методі Ойлера, локальна похибка пропорційна h^2. На всьому ж відрізку, на якому треба розв'язати диференціальне рівняння кількість кроків пропорційна $\frac{1}{h}$. Отже, глобальна похибка пропорційна $\frac{1}{h}$. З цієї причини метод Ойлера називають методом 1-го порядку.

11.2. Покращений метод Ойлера

1. Метод Ойлера має доволі низьку точність. Для малих значень кроку h кількість обчислень зростає; округлення на великій кількості кроків може призвести до безглуздих результатів. Зрозуміло, що в методах вищого порядку і точності беруть до розгляду більше членів формулу Тейлора. Але це пов'язано з важливою практичною проблемою.

А саме, якщо підставляти $y' = f(x, y(x))$ у Тейлорове розвинення, то дістаємо

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2!}f' + \frac{h^3}{3!}f'' + \dots$$

Зараз y в f залежить від x, так що маємо

$$y'' = f' = f'_x + f'_y y' = f'_x + f'_y f,$$

а вирази для f'' та f''' є ще громіздкішими. Загальна стратегія — уникнути обчислення цих похідних і замінити їх обчисленням f для одного чи кількох правильно вибраних додаткових значень $(x;y)$. «Правильно» означає, що ці значення вибрані так, щоб одержати порядок методу якомога вищим (мати найвищу точність).

На кожному кроці покращеного методу Ойлера ми обчислюємо два значення, спершу *предиктор*

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \tag{11.2}$$

який є допоміжним значенням, і потім нове значення y, *коректор*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})\Big]. \tag{11.3}$$

Отже, покращений метод Ойлера є предиктор-коректор метод: на кожному кроці ми прогнозуємо значення (11.2), а потім уточнюємо за формулою (11.3).

Локальна похибка покращеного методу Ойлера має порядок h^3, а глобальна похибка — порядок h^2, так що це метод 2-го порядку.

11.3. Метод Рунґе – Кутти

1. Методом великого практичного значення і набагато точнішим за покращений метод Ойлера є класичний метод Рунґе —Кутти 4-го порядку (коротше, метод Рунґе — Кутти).

На кожному кроці обчислюють спершу допоміжні величини

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n);\\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right),\\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right),\\ k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right), \end{aligned}$$

а потім основні:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h,\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

11.4. Зворотній метод Ойлера

Зворотній метод Ойлера чисельно реалізують за схемою

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), n = 0,1,2,... \qquad (11.4)$$

Для відомого значення y_n ця формула дає значення y_{n+1} неявно. Отже, співвідношення (11.4) ще треба розв'язати щодо значення y_{n+1}. Складність цього залежить від f. Для лінійного диференціального рівняння це не становить проблему. Метод особливо зручний для *«жорстких»* диференціальних рівнянь, які часто виникають під час вивчення коливань, електричних кіль, хімічних реакцій тощо.

Члени, що виражають похибку містять вищі похідні. Поставмо питання: що трапиться, якщо дозволити h зростати. Тоді похибка (похідні) зростатимуть швидше, розв'язок також зростатиме швидше, нічого не трапиться. Однак, якщо розв'язок не зростає швидко, зі зростанням h члени, що виражають похибку, можуть перекрити чисельні розв'язки і дістаємо безглуздий результат. Такі диференціальні рівняння, для яких розмір кроку h повинен бути обмежений малими значеннями, і фізичні системи, які ці диференціальні рівняння моде-

люють називають жорсткими. Термін було запропоновано для навантаженої пружної системи з жорсткою пружиною. Застосування неявних методів вилучають складнощі зі зростанням h у разі жорсткості. Можна показати, що застосований неявний метод розв'язання залишається стійким для будь-якого зростання h, хоча точність спадає зі зростанням h.

11.5. Багатокрокові методи

В однокроковому методі значення y_{n+1} обчислюють використовуючи тільки один крок, а саме, попереднє значення y_n. Однокрокові методи є «самодостатніми», вони не потребують підготовки для початку роботи, оскільки за відомим значенням y_0 дістають значення y_1 тощо. Усі попередні методи є однокроковими.

Навпаки, багатокроковий метод використовує на кожному кроці два або більше попередні кроки. Ці методи змотивовані очікуванням, що додаткова інформація підвищить точність та стійкість. Але, щоб розпочати, треба ще одержати, скажімо, y_0, y_1, y_2, y_3 у 4-х кроковому метод, одержаних методом Рунґе — Кутти або іншим точним методом. Тому, багатокрокові методи не можуть початись самі по собі.

1. Метод Адамса — Башфорда. Розгляньмо задачу Коші

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0,$$

з функцією f такою, що ця задача має єдиний розв'язок на деякому інтервалі $(a; b) \ni x_0$. Зінтегруємо рівняння $y' = f(x, y)$ від x_n до $x_{n+1} = x_n + h$.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx.$$

Заміняємо функцію $f(x, y(x))$ інтерполяційним многочленом, який можна зінтегрувати. Це дає наближення y_{n+1} значення $y(x_{n+1})$ та y_n значення $y(x_n)$:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)dx.$$

Різноманітний вибір $p(x)$ приводить до різних методів. Розглянемо наближення кубічним многочленом, а саме, многочленом $p_3(x)$ таким, що (ріновіддалені) вузли

$$x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$$

мають відповідно значення

$$\begin{aligned} f_n &= f(x_n, y_n), \\ f_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ f_{n-2} &= f(x_{n-2}, y_{n-2}), \\ f_{n-3} &= f(x_{n-3}, y_{n-3}). \end{aligned}$$

Це приводить до практично корисної формули. Знайти многочлена $p_3(x)$ можна за Ньютоновими формулою зворотних різниць

$$p_3(x) = f_n + r\nabla f_n + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\nabla^3 f_n,$$

де

$$r = \frac{x - x_n}{h}.$$

Зінтегруємо $p_3(x)$ за x від x_n до $x_{n+1} = x_n + h$, тому $0 < r < 1$. З $x = x_n + hr$ випливає, що $dx = hdr$.

Отже,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3 dx = h\int_0^1 p_3 dr = h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n \right).$$

Для практичних обчислень замінімо різниці виразами в термінах f:

$$\begin{aligned} \nabla f_n &= f_n - f_{n-1}, \\ \nabla^2 f_n &= f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}, \\ \nabla^3 f_n &= f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці співвідношення у формулу і зводячи подібні доданки, дістаємо багатокрокову формулу методу Адамса — Башфорта 4-го порядку

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}).$$

Вона виражає нове значення y_{n+1} (наближення розв'язку задачі Коші y у точці x_n) через 4 значення f, обчисленого за допомогою значень y, одержаних на попередніх 4 кроках. Локальна похибка має по-

рядок h^5, а глобальна похибка має порядок h^4. Отже, побудований метод має 4-й порядок точності.