ЛЕКЦІЯ 6. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

У найпростіших випадках інтеграл вдається обчислити за допомогою елементарних перетворень і використання формули Ньютона — Лейбніца. Однак елементарні первісні існують не для будь-яких підінтегральних функцій, крім того, f може бути задано таблично, алгоритмічно або в будь-який інший спосіб, який виключає використання первісних. Але навіть якщо елементарна первісна існує, цілком може трапитись що її обчислення потребує великих витрат обчислювальних ресурсів або є недоцільним з певних міркувань.

6.1. Вступ

1. Розгляньмо способи наближеного обчислення визначених інтегралів

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

що ґрунтується на заміні інтеграл скінченною сумою

$$I_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_k f(x_k),$$

де c_k — числові коефіцієнти, x_k — точки відрізка $[a;b], k = \overline{0,n}$. Наближену рівність

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

називають *квадратурною формулою*, а інтегральну суму справа — *квадратурною сумою*. Різницю

$$\psi_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)$$

називають *похибкою квадратурної формули*. Похибка залежить як від розташування вузлів, так і від вибору коефіцієнтів.

Для оцінки похибки функцію f припускатимемо достатньо гладкою.

2. Розгляньмо на відрізку $[a;b]$ рівномірну сітку з кроком h, тобто множину точок

$$\omega_h = \left\{ x_i = a + ih, i = \overline{0,n}, h = \frac{b-a}{n} \right\}$$

і подаймо інтеграл як суму інтегралів за частковими відрізками:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Для побудови формули чисельного інтегрування на всьому відрізку $[a;b]$ досить побудувати квадратурну формулу для інтеграла

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

на частковому відрізку $[x_{i-1};x_i]$.

6.2 Формула прямокутників

1. Замінімо інтеграл

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

виразом $f(x_{i-1/2})h$, де $x_{i-1/2} = x_i - \dfrac{h}{2}$.

Геометрично така заміна означає, що площе криволінійної трапеції $ABCD$ замінюємо площею прямокутника $ABC'D'$. Тоді дістаємо формулу

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-1/2})h, \text{ (6.1)}$$

яку називають *формулою середніх прямокутників* на частковому відрізку $[x_{i-1};x_i]$.

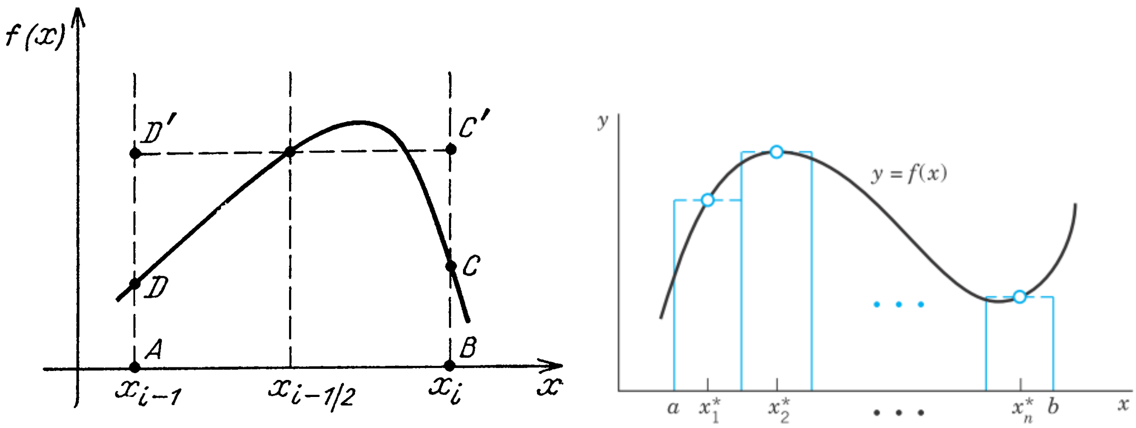


Рис. 5.1. Формула середніх прямокутників

Похибку методу визначає величина

$$\psi_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_{i-1/2})h,$$

яку можна оцінити за допомогою формули Тейлора:

$$\left|\psi_i\right| \le \frac{h^3}{24} M_{2,i},$$

де $M_{2,i} = \max\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} \left|f''(x)\right|$.

2. Підсумовуючи рівності (6.1), дістаємо *складену формулу середніх прямокутників*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})h.$$

Оцінку похибки для цієї формули дає нерівність

$$\left|\Psi\right| \le \frac{h^2(b-a)}{24} M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} \left|f''(x)\right|$, тобто похибка формули середніх прямокутників на всьому відрізку є має порядок точності 2.

3. Розглядають також формули лівих та правих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})h, \quad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h.$$

Через порушення симетрії похибка таких формул має порядок 1.

6.3. Формула трапецій

1. На частковому відрізку ця формула має вигляд

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h$$

і будується заміною підінтегральної функції f інтерполяційним многочленом 1-го степеня, побудованого по вузлах x_{i-1}, x_i, тобто функцією

$$L_{1,i} = \frac{1}{h}\Big((x - x_{i-1})f(x_i) - (x - x_i)f(x_{i-1})\Big).$$

Маємо таку оцінку похибки:

$$\left|\psi_i\right| \le \frac{M_{2,i}h^3}{12}.$$

Геометрично це означає заміну площі криволінійної трапеції $ABCDE$ площею трапеції $ABDE$.

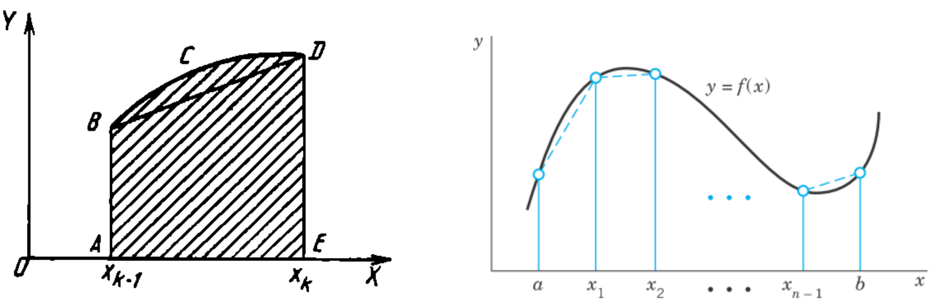


Рис. 5.2. Формула трапецій

2. *Складена формула трапецій* має вигляд

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}h = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right),$$

де $f_i = f(x_i), i = \overline{0, n}, h = \dfrac{b-a}{n}$.

Маємо таку оцінку похибки формули:

$$\left|\Psi\right| \le \frac{h^2(b-a)}{12} = \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]}\left|f''(x)\right|$,

Отже, формула трапецій має, так само як і формула середніх прямокутників, порядок точності 2, але її похибку оцінюють удвічі більшою величиною.

6.4. Формула Сімпсона

1. Апроксимуючи інтеграл

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

замінімо функцію f квадратичною функцією, графік якої проходить через точки $(x_j; f(x_j))$, де $j = i-1, i-\frac{1}{2}, i$, тобто апроксимуємо функцію f інтерполяційним многочленом Лаґранжа 2-го степеня:

$$f(x) \approx L_{2,i}(x), x \in [x_{i-1}; x_i],$$

$$L_{2,i}(x) = \frac{2}{h^2}\left\{\begin{matrix} (x - x_{i-1/2})(x - x_i)f_{i-1} - \\ -2(x - x_{i-1})(x - x_i)f_{i-1/2} + \\ (x - x_i)(x - x_{i-1/2})f_i \end{matrix}\right\}.$$

Інтегруючи, дістаємо *формулу парабол (Сімпсона)* для часткового відрізка:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i), \; h = x_i - x_{i-1}.$$

Геометрично це означає заміну площі криволінійної трапеції $ABCDEFG$ площею криволінійної трапеції ABC_1DE_1FG.

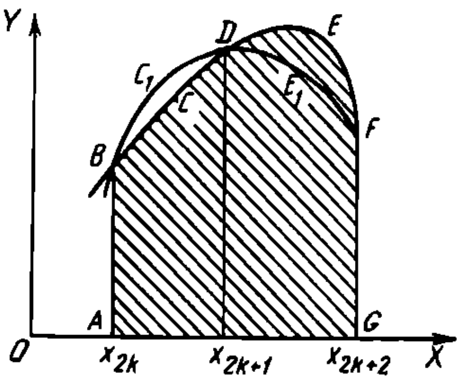


Рис. 5.3. Формула парабол (Сімпсона)

2. На всьому відрізку $[a;b]$ формула Сімпсона має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i) =$$

$$= \frac{h}{6}\Big[f_0 + f_n + 2(f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}) + 4(f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{n-1/2})\Big]$$

Маємо таку оцінку похибку *складеної формули Сімпсона*:

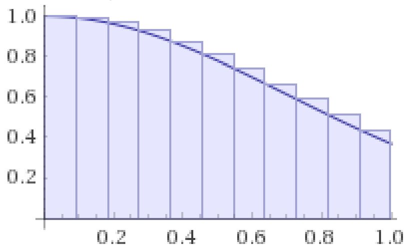
$$|\Psi| \le \frac{h^4(b-a)}{2880} M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880} M_4,$$

де $M_4 = \max\limits_{x\in[a;b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$.

Отже, формула Сімпсона істотно точніше, ніж формули прямокутників та трапецій. На окремому відрізку вона має точність 5-го порядку, а на всьому відрізку — точність 4-го порядку.

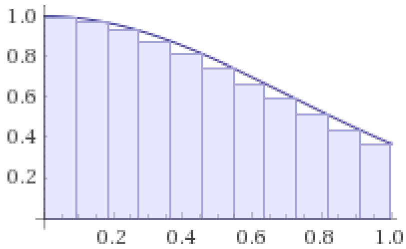
3. Приміром, обчислімо наближено $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx, n = 10$ за різними формулами і порівняймо похибки за допомогою WolframAlpha.

Формула лівих прямокутників:



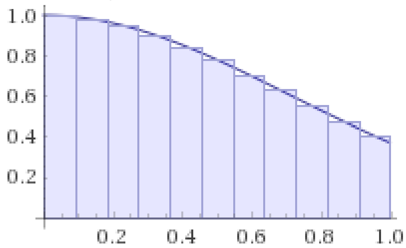
$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} e^{-\frac{n^2}{121}}$$

Формула правих прямокутників:



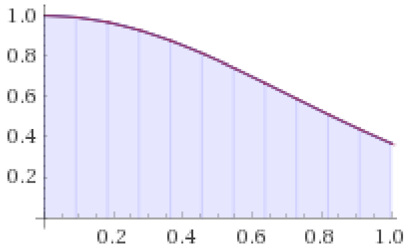
$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{11} \sum_{n=1}^{11} e^{-\frac{n^2}{121}}$$

Формула середніх прямокутників:



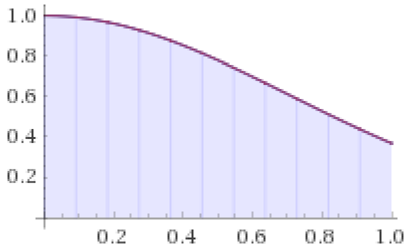
$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{11} \sum_{n=0}^{10} e^{-\frac{1}{484}(1+2n)^2}$$

Формула трапецій:



$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{22} \sum_{n=0}^{10} \left(e^{-\frac{n^2}{121}} + e^{-\frac{1}{121}(1+n)^2} \right)$$

Формула Сімпсона:



$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \approx \frac{1}{66}\left(1+2\sum_{n=1}^{11-1} e^{-\frac{n^2}{121}} + 4\sum_{n=1}^{11} e^{-\frac{1}{484}(1-2n)^2} + \frac{1}{e}\right)$$

method	result	absolute error	relative error
left endpoint	0.77505	0.0282259	0.0377946
right endpoint	0.717585	0.0292396	0.0391519
midpoint	0.747078	0.000253483	0.000339414
trapezoidal rule	0.746317	0.000506861	0.000678688
Simpson's rule	0.746824	3.48808×10^{-8}	4.67054×10^{-8}

6.5. Квадратурні формули інтерполяційного типу

1. Розгляньмо формули наближеного обчислення інтегралів

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx,$$

де $\rho(x) > 0$ — задана інтегровна функція, яку називають ваговою функцією та f — достатньо гладка функція. Розглянуті далі формули мають вигляд

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k),$$

де $x_k \in [a;b], c_k = \text{const}, k = \overline{0,n}$

На відміну від розглянутих форму, не розбиватимемо відрізок $[a;b]$ на часткові відрізки, а дістаньмо квадратурні формули, замінюючи f інтерполяційним многочленом відразу на всьому відрізку $[a;b]$. Одержані таким чином формули називають *квадратурними формулами інтерполяційного типу*. Як правило, точність цих формул зростає зі збільшенням кількість вузлів інтерполювання. Розглянуті раніше формули середніх прямокутників, трапецій та Сімпсона є окремі випадками квадратурних формул інтерполяційного типу, коли $n = 0, 1, 2, \rho(x) \equiv 1$.

2. Одержім вирази для коефіцієнтів квадратурних формул інтерполяційного типу. Нехай на відрізку $[a;b]$ задано вузли інтерполювання $x_k, k = \overline{0,n}$. Припускаємо, що серед цих вузлів немає кратних.

Замінюючи в інтегралі

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx$$

функцію f інтерполяційним многочленом Лаґранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k),$$

де

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \omega'(x_k) = \prod_{j\neq k}(x_k - x_j),$$

дістаємо квадратурну формулу, де

$$c_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad k = \overline{0,n}.$$

2. Оцінка похибки. Одержімо вираз для похибки квадратурної формули інтерполяційного типу. Подаймо функцію f у вигляді

$$f(x) = L_n(x) + r_n(x),$$

де $L_n(x)$ — інтерполяційний многочлена для f, побудований за вузлами $x_0,\dots,x_n$ та $r_n(x)$ — похибка інтерполювання. Тоді,

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)L_n(x)dx + \int_a^b \rho(x)r_n(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) + \int_a^b \rho(x)r_n(x)dx.$$

Отже, похибка квадратурної формули дорівнює

$$\psi_n = \int_a^b \rho(x)r_n(x)dx.$$

Оскільки

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}\omega(x),$$

то дістаємо

$$\psi_n = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \rho(x)\omega(x)f^{(n+1)}(c(x))dx$$

і

$$\left|\psi_n\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b \rho(x)\left|\omega(x)\right|dx,$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

3. Формули Ньютона — Котеса. *Формулами Ньютона — Котеса* називають квадратурні формули інтерполяційного типу, побудовані на рівномірній сітці, коли $x_k - x_{k-1} = h, k = \overline{0,n}$.

Розрізняють два типи формул Ньютона — Котеса: формули *замкненого типу* й формули *відкритого типу*. У формулах замкненого типу $x_0 = a$ та $x_n = b$, а у формулах відкритого типу хоча б з вузлів x_0 чи x_n не збігається з кінцевою точкою відрізка $[a;b]$. Для простоти викладу розгляньмо лише випадок формул замкненого типу, коли

$$x_k = a + kh, k = \overline{0,n}, h = \frac{b-a}{n}.$$

Виконуючи заміну в інтегралі $x = a + ht, 0 \le t \le n$, дістаємо

$$c_k = (b-a)b_k^{(n)},$$

$$b_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\int_0^n \rho(a+ht)\frac{t(t-1)...(t-n)}{t-k}dt\right).$$