

3-MA'RUZA. QATTIQ JISMNING ILGARINLANMA VA QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI.

REJA:

1. Qattiq jismning ilgarinlanma harakati.
2. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati
3. Aylanma harakat burchak tezligi
4. Aylanma harakat burchak tezlanishi.
5. Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi.

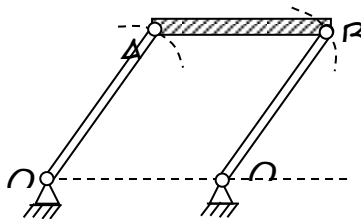
Kinematikada statikadagidek qattiq jismni mutlaq qattiq jism deb qaraladi. Jismning istalgan ikki nuqtasining oralig'i hamma vaqt o'zgarmasdan qolsa, bunday qattiq jismga mutlaq qattiq jism deyiladi. Bundan buyon jism yoki qattiq jism deganda mutlaq qattiq jism tushuniladi. Qattiq jism harakatini kinematik o'rganish bu harakatlanayotgan jismni harakat tenglamalarini tuzish va harakatni xarakterlaydigan kinematik xarakteristikalarini o'rganishdan iborat bo'ladi. Butun jismning harakatlanishi kinematik elementlari: harakat qonuni, tezlik va tezlanishlari ma'lum bo'lgandan keyin jism bo'laklarining harakati o'rganiladi. Jismni tashkil etuvchi bo'laklarning xarakterlariga xos bo'lgan qonuniyatlar aniqlanadi.

Odatda qattiq jism harakatini o'rganish uning sodda harakatlarini o'rganishdan boshlanadi. Jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatlariga jismning sodda yoki asosiy harakatlari deyiladi. Jismning har qanday murakkab harakatlarini shu ikki harakatdan tashkil topgan deb qaraladi.

Qattiq jismning ilgarinlanma harakati.

Jismda olingan har qanday kesma harakat davomida hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qolsa, jismning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi. Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtalarining traektoriyalari istalgan egri chiziq bo'lishi mumkin. Masalan to'g'ri chizikli relsda harakatlanayotgan vagon kuzovining harakati ilgarilanma harakat bo'lib, kuzov nuqtalarining traektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Ikkinchi misol tariqasida 3.1 -shaklda ko'rsatilgan



3.1-shakl.

AB sparnik harakatini kuzatamiz. O_1A va O_2B krivoshiplar O_1 , O_2 nuqtalar atrofida aylanganda AB sparnik hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qoladi, ya'ni ilgarilanma harakat qiladi. Sparnik nuqtalari markazi O_1O_2 chizig'ida yotgan

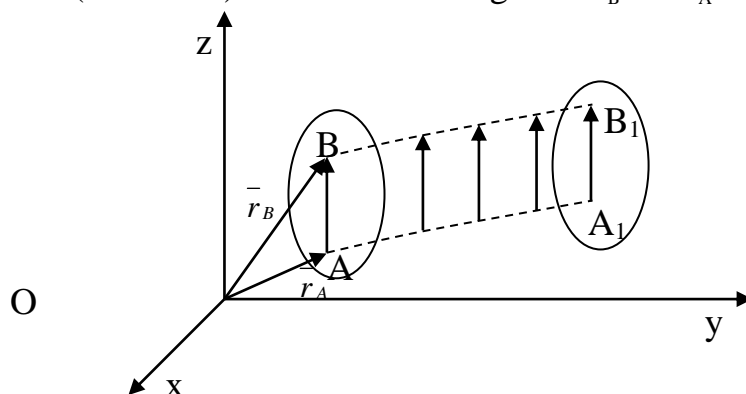
aylanalar chizadi. Demak, bu holda ilgariylanma harakatdagi AB sparnik nuqtalarining traektoriyalari egri chiziqdan iborat bo'ladi. Ilgarilanma harakatning kinematik xususiyatlarini aniqlaydigan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema: Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning hamma nuqtalari bir xil traektoriya chizadi va har onda jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari bir-biriga teng bo'ladi.

Teoremani isbotlash uchun berilgan OXYZ qo'zg'almas hisoblash sistemasiga nisbatan ilgariylanma harakatni tekshiramiz. Jismning ixtiyoriy A va B nuqtalarini olib, ularning radius vektorlarini o'tkazamiz.

$$\text{SHakldan} \quad \bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \quad (3.1)$$

tenglikni olamiz (3.2-shakl). Jism harakatlanganda \bar{r}_B va \bar{r}_A lar o'zgaradi.



3.2-shakl.

Ammo AB kesmaning uzunligi va yo'nalishi o'zgarmaydi, chunki qattiq jism ta'rifiga ko'ra AB uzunligi o'zgarmas bo'lib, ilgariylanma harakat ta'rifiga ko'ra doimo o'z-o'ziga parallel qoladi, ya'ni $\overline{AB} = const$. SHuning uchun tenglamadagi \bar{r}_B va \bar{r}_A vektorlarni o'zgarganda ularning uchlaridagi A va B nuqtalarining chizgan AA_1 va BB_1 traektoriyalari o'zaro teng $AA_1 = BB_1$ va $AA_1 \parallel BB_1$ bo'ladi. (3.1) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt} \quad \text{bunda} \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$$

bo'lgani uchun

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} \quad (3.2)$$

A va B nuqtalar ixtiyoriy nuqta bo'lgani uchun ilgariylanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezliklari bir xilda bo'ladi degan natijaga kelamiz. (3.2) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} \quad \text{bundan} \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A \quad (3.3)$$

(3.3) tenglikdan ilgariylanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezlanishlari bir xilda bo'ladi, degan natijaga kelamiz. SHunday qilib, teorema isbotlandi. Ilgarilanma harakat ta'rifidan va isbotlangan teoremadan jismning ilgariylanma harakati uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlanishini ko'ramiz. Bunday nuqta uchun ko'pincha jism og'irlik markazi olinadi.

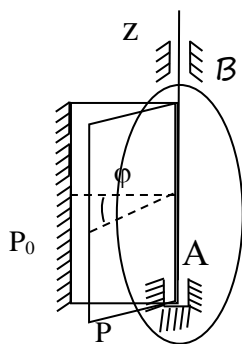
$$\left. \begin{aligned} X_c &= f_1(t) \\ Y_c &= f_2(t) \\ Z_c &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

C nuqtaning harakat tenglamalari jismning ilgarilanma harakat tenglamalari bo'ladi. SHuning uchun ilgarilanma harakatdagi jism kinematikasi nuqta kinematikasidan farq qilmaydi.

Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtasining \bar{g} tezligi va \bar{a} tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xilda bo'lgani uchun \bar{g} tezlikka jismning ilgarilanma harakat tezligi, \bar{a} ga jismning ilgarilanma harakat tezlanishi deyiladi. \bar{g} va \bar{a} tezlik va tezlanish jismning istalgan nuqtasiga qo'yilgan deb tasvirlanadi. SHuni ta'kidlab o'tamizki, faqat jismning ilgarilanma harakati uchun \bar{g} va \bar{a} tezlik va tezlanishlar jismning ilgarilanma harakat tezligi va tezlanishi deb ataladi. Ammo jismning boshqa turdagi harakatlarida uning nuqtalari turlicha harakat qiladi. SHuning uchun uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlab bo'lmaydi. Bunday holda jism nuqtasining tezligi, tezlanishini jism tezligi va tezlanishi deb atash mumkin yemas.

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati.

Qattiq jism harakatlanganda uning ikki nuqtasi doimo harakatsiz qolsa, qattiq jismning bunday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati deyiladi. SHu qo'zg'almas nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqqa aylanish o'qi deyiladi. Aylanish o'qida joylashgan jism nuqtalari doimo harakatsiz bo'ladi. Aylanish o'qidan tashqarida joylashgan hamma nuqtalari traektoriyasi aylanish o'qiga tik bo'lgan tekisliklarda joylashgan, markazi aylanish o'qida bo'lgan aylanalardan iborat bo'ladi. Qattiq jismning aylanma harakatini tekshirish uchun aylanish o'qi orqali ikki tekislik o'tkazamiz. Ulardan biri qo'zg'almas P_0 , ikkinchisi jism bilan birlashtirilgan, u bilan birga harakatlanadigan P tekislik bo'lsin. Aylanish o'qini jismning qo'zg'almas A va B nuqtalari orqali yuqoriga yo'naltiramiz va uni Az deb belgilaymiz. Jismni Az o'qi atrofida harakatlanganda P tekislik P_0 tekislikka nisbatan φ burchakka buriladi. Bu burchak aylanish burchagi deyiladi. Aylanish o'qining musbat yo'nalishidan qaraganimizda jism soat milining aylanishiga teskari tomonga aylanma harakatini musbat yo'nalishda deb qaraymiz. Aks holda harakat manfiy yo'nalishda bo'ladi. Demak, burchak P_0 dan P tekislikka qarab soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda kesib boradi.



3.3-shakl.

Aylanish burchagining o'zgarishi P tekislikni P_0 tekislikka nisbatan harakatlanishini ifodalaydi. SHuning uchun aylanish burchagi φ bilan vaqt orasidagi munosabat

$$\varphi = f(t) \quad (3.5)$$

(3.5) ga jism aylanma harakat tenglamasi deyiladi. Agar (3.5) tenglik berilgan bo'lsa, vaqtning har bir paytdagi jismning holati ma'lum bo'ladi. Aylanish burchagi radianda o'lchanadi, u vaqtning bir qiymatli, uzliksiz, differentsiallanadigan funksiyasi bo'ladi. Jism qo'zg'almas o'q

atrofidagi holati bitta aylanish burchagi bilan aniqlangani uchun aylanma harakatdagi jism bitta erkinlik darajasiga ega bo'ladi.

Aylanma harakat burchak tezligi.

Faraz qilaylik, jism t -vaqtda φ burchakka burilgan bo'lib, Δt vaqtdan keyin $\varphi + \Delta\varphi$ burchakka burilsin. $\Delta\varphi$ ning Δt ga nisbati (3.6) ga o'rtacha burchakli tezlik deyiladi. Vaqtning har bir paytdagi burchak tezligini aniqlash uchun (3.6) dan Δt nolga intilgandagi limitni olamiz.

$$\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (3.6)$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.7)$$

Demak, haqiqiy burchak tezligi aylanish burchagidan vaqtga nisbatan olingan birinchi hosilasiga teng, hosilaning ishorasi harakat o'suvchi yoki kamayuvchi ekanini ko'rsatadi. Masalan, agar $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ bo'lsa, harakat o'suvchi

bo'lib, φ burchagi orta boradi, $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ bo'lsa, φ burchagi kamayadi va harakat

kamayuvchi bo'ladi. SHunday qilib hosilaning ishorasi harakat yo'nalishini aniqlaydi. Burchak tezligi rad/s bilan yoki 1/s bilan o'lchanadi. Aylanma harakatda burchak tezligi $\bar{\omega}$ -aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan vektor kattalik bilan ifodalanadi. U aylanish o'qining istalgan nuqtasiga qo'yiladi va uning uchidan qaraganimizda jism soat milining yo'nalishiga teskari aylanishini ko'rish kerak.

Agar harakat davomida hamma vaqt ω o'zgarmas bo'lsa, harakat tekis aylanma harakat bo'ladi. Bu o'zgarmasni ω_0 bilan belgilab, (3.7) tenglikka qo'yamiz.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

bundan

$$d\varphi = \omega_0 dt$$

Hosil bo'lgan tenglikda boshlang'ich shartlarni hisobga olib, ya'ni, $t=0$ da $\varphi = \varphi_0$, tenglamani integrallaymiz.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt$$

ω_0 -o'zgarmas bo'lgani uchun quyidagi tenglik tekis aylanma harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \quad (3.8)$$

Agar boshlang'ich $t=0$ paytda $\varphi_0 = 0$ bo'lsa, yuqoridagi tenglik quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\varphi = \omega_0 t \quad \text{bundan} \quad \omega_0 = \frac{\varphi}{t} \quad (3.9)$$

Kinematika masalalarida ko'pincha tekis aylanma harakat burchak tezligini jismning $t = 1$ min ichidagi aylanish soni n ifodasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Jism bir aylanganda $\varphi = 2\pi$ burchakka aylanadi. Agar $t = 1$ minut 60 s jism n marotaba aylansa, $\varphi = 2\pi n$ bo'ladi (3.9) tenglikdan foydalanib, ω bilan n orasidagi munosabatni topamiz

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

Bunda $\omega = \omega_0 = const$ deb hisoblanadi.

Aylanma harakat burchak tezlanishi.

Burchak tezlanishi aylanma harakat burchak tezligining vaqt birligi ichida o'zgarishini xarakterlaydi. Burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqtga nisbatan birinchi hosila yoki aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng bo'ladi. Burchak tezlanishini ε bilan belgilaymiz

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3.10)$$

Burchak tezlanishi rad/s^2 yoki $1/\text{s}^2$ bilan o'lchanadi. Agar ω bilan ε bir xil ishorali bo'lsa, harakat tezlanuvchan, har xil ishorali bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi. Harakat davomida $\varepsilon = const$ bo'lsa, bunday harakatga tekis o'zgaruvchan aylanma harakat deyiladi. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{dan} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

tenglikni olamiz, bunda $\varepsilon = const$. Hosil bo'lgan tenglikni hisobga olgan holda (3.7) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t) dt$$

Buni yana $t = 0$ da $\varphi = \varphi_0$ boshlang'ich shartlarda integrallab tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

ε ning ishorasi harakatni tezlanuvchan yoki sekinlanuvchan yekanini ko'rsatadi. Agar $t = 0$ da $\varphi = 0$ bo'lsa, $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ tenglik hosil bo'ladi.

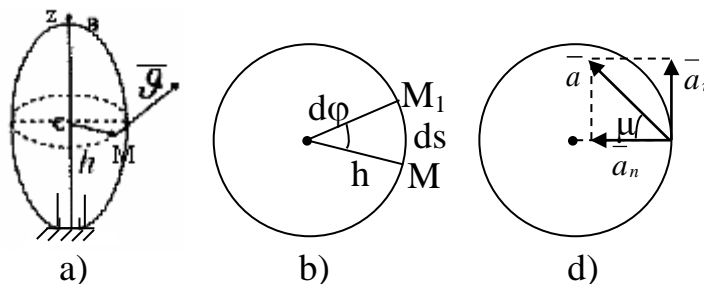
Aylanish o'qining birlik yo'naltiruvchi vektorini \bar{k} bilan belgilasak, aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan burchak tezlik ϖ vektorining vaqtga nisbatan hosilasi burchak tezlanish vektorini ifodalaydi.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\varpi}{dt} \bar{k} \quad \text{yoki} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}$$

Aylanish o'qi qo'zg'almas bo'lgani uchun $\bar{k} = const$ bo'ladi. Demak, burchak tezlanishi $\bar{\varepsilon}$ vektorini aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, ϖ va $\bar{\varepsilon}$ bir tomonga yo'nalsa, tezlanuvchan, qarama-qarshi tomonga yo'nalsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi.

Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi.

Qattiq jismning nuqtalari harakatlarini xarakterlovchi kinematik yelementlari – traektoriya, tezlik va tezlanishlarini topamiz. Buning uchun jismni aylanish AZ (3.4-a shakl) o'qidan ixtiyoriy masofada joylashgan M nuqtasining tezlik va tezlanishini aniqlaymiz. Faraz qilaylik M nuqta aylanish o'qidan h masofada joylashgan bo'lsin, jism harakatlanganda M nuqta radiusi h bo'lgan markazi aylanish o'qining S nuqtasida joylashgan aylana chizadi. Agar jism Δt vaqt ichida aylanish o'qi atrofida $\Delta\varphi$ burchakka burilsa, M nuqta traektoriya bo'ylab $MM_1 = dS = h \cdot d\varphi$ yoyini o'tadi.(3.4-b shakl).



3.4-shakl.

Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun M nuqtaning tezligi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$g = \frac{dS}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega \quad (3.11)$$

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezligi nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional o'zgarar ekan. Tezlik harakat yo'nalishida traektoriyaga urinma bo'ylab yo'naladi. Endi M nuqtaning tezlanishini topamiz. Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun M nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlardan tashkil topadi (3.4-d shakl).

$$a_n = \frac{g^2}{\rho}; \quad a_\tau = \frac{dg}{dt}$$

Bu tengliklarga (9.11) dan g ning qiymatini qo'yamiz:

$$a_n = \frac{d}{dt}(\omega \cdot h) = h \cdot \varepsilon; \quad a_n = \frac{(\omega \cdot h)^2}{h} = \omega^2 \cdot h \quad (3.12)$$

M nuqtaning to'liq tezlanishining miqdori:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (3.13)$$

va yo'nalishi

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (3.14)$$

(3.14) formulalardan aniqlanadi. (3.11), (3.12) hamda (3.13) formulalar aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional ekanligini ifodalaydi. a_n tezlanishi hamma vaqt aylanish markaziga qarab yo'naladi, ammo urinma tezlanish yo'nalishi harakatning tezlanuvchan yoki sekinlanuvchanligiga bog'liq bo'ladi.

$\varepsilon > 0$ bo'lsa, harakat tezlanuvchan bo'lib, a_τ bilan ϑ bir yo'nalishda, $\varepsilon < 0$ bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'lib, a_τ , ϑ ga teskari yo'naladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Qattiq jismning qanday harakati ilgariylanma deyiladi?
2. Jismni ilgariylanma harakatida uning nuqtalari traektoriyasi aylanadan iborat bo'lishi mumkinmi?
3. Qattiq jimsning ilgariylanma harakati qanday xossalarga ega?
4. Qattiq jimsning qanday harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat deyiladi? Qattiq jism nuqtasi traektoriyasi nimadan iborat bo'ladi?
5. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat tenglamasi qanday?
6. Burchak tezlik, burchak tezlanish nima?

Tayanch so'z va iboralar

Aylanish o'qi, ilgariylanma harakat, aylanma harakat, burchak tezlik, burchak tezlanish, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat, burchak vektori va burchak tezlanishi vektori, urinma va normal tezlanish.