Ma’ruza №2

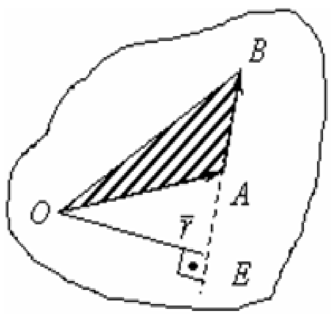
TEKISLIKDA IXTIYORIY JOYLASHGAN KUCHLAR SISTEMASI VA UNING MUVOZANATI. BOSH VEKTOR VA BOSH MOMENT

Reja:

- ***Kuchning nuqtaga nisbatan momenti***
- ***Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori.***
- ***Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish.***
- ***Kuchlar sistemasini bir juftga keltirish.***
- ***Teng ta’sir etuvchining momentiga oid Varinon teoremasi.***
- ***Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari.***
- ***Reaksiya kuchlarini aniqlashga doir qo’shimchalar.***

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti

- Kuchning biror nuqtaga nisbatan algebraik momenti deb, kuch yelkasi bilan kuch miqdorini ko'paytmasidan iborat bo'lgan kattalikka aytiladi.
- Moment markazi (0) nuqtadan kuchni ta'sir chizig'iga o'tkazilgan perpendikulyar masofa *OE=h* kuch yelkasi deyiladi. (2.1-shakl).



2.1-shakl.

Agar $\overline{F}$ kuchini O nuqtaga nisbatan momentini $M_0(\overline{F})$ deb belgilasak,

$$M_0(\overline{F}) = \pm hF \qquad (2.1)$$

Agar *0* nuqtadan qaraganimizda kuch jismni soat mili yo'nalishiga teskari aylantirsa moment ishorasi musbat, aksincha manfiy bo'ladi.

Uning o'lchovi birligi N·m. Algebraik momentning miqdori kuchning ta'sir chizig'i bo'yicha ko'chirganiga bog'liq emas.

Agar kuchning ta'sir chizig'i O nuqtadan o'tsa, kuchning algebraik momenti nolga teng: 2.1-shakldan

$$M_0(\overline{F}) = \pm 2S_{OAB} \qquad (2.2)$$

S_{OAB}-uchburchak OAB ning yuziga teng.

TEKISLIKDA IXTIYORIY JOYLASHGAN KUCHNING NUQTAGA NISBATAN MOMENTI VEKTORI.

O nuqtaga nisbatan kuchning algebraik momenti:

$$M_0(\overline{F})=hF \qquad (2.3)$$

Agar $\bar{r}$, A nuqtani radius vektori bo'lsa, 2.1-shakldan.

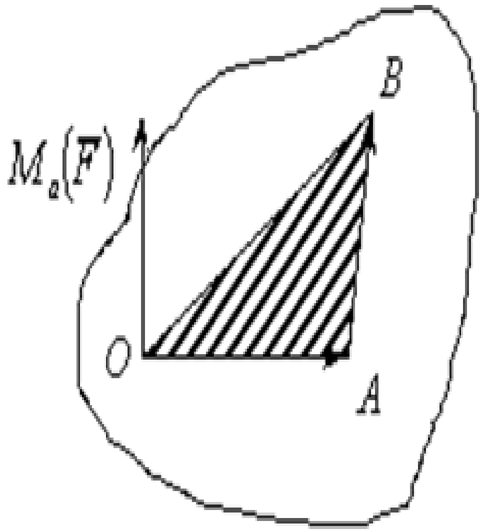
$$h=r\sin(\overline{F}\,\hat{}\,\bar{r}) \qquad (2.4)$$

(2.4.) ni (2.3) ga qo'ysak,

$$M_0(\overline{F})=F\cdot r\cdot\sin(\overline{F}\,\hat{}\,\bar{r}) \qquad (2.5)$$

Vektorlar qoidasiga asosan (2.5) ni quyidagicha yozamiz:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \bar{r}\mathrm{x}\overline{F} \qquad (2.6)$$



2.2-shakl

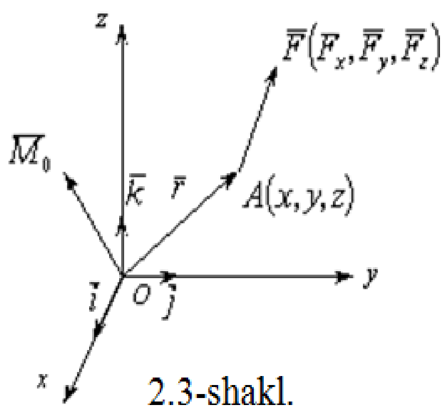
$\overline{M}_0(\overline{F}) = \bar{r}x\overline{F}$ vektori $\overline{F}$ kuchni O nuqtaga nisbatan momenti vektori deyiladi. (2.2-shakl).

Demak, kuchning biror nuqtaga nisbatan momenti vektori deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor shu nuqtaga qo'yilgan bo'lib uning miqdori kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momentiga teng bo'ladi. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori kuch bilan nuqta yotgan tekislikka prependikulyar bo'lib, uning uchidan qaraganda jism soat mili yo'nalishiga teskari ravishda aylanadi. Agar $\overline{F}$ kuchni nol nuqtaga nisbatan momenti vektorini miqdorini $M_0(\overline{F})$ deb belgilasak $M_0(\overline{F})=F{\cdot}h$ bo'ladi. $|M_0(\overline{F})| = F \cdot h \cdot 2\cos\alpha$ |

Agar $\overline{F}$ kuchning dekart koordinata sistemasidagi proektsiyalari F_x, F_y, F_z hamda u quyilgan nuqtaning x, y va z koordinatalari berilgan bo'lsa (2.6) ni quyidagicha yozamiz:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r}x\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \\ x, y, z \\ F_x, F_y, F_z \end{vmatrix} = (yF_z - ZF_y)\overline{i} + (zF_x - xF_z)\overline{j} + (xF_y - yF_x)\overline{k} \qquad (2.7)$$

$\overline{i}$, $\overline{j}$ va $\overline{k}$ lar birlik vektorlar(2.3-shakl).



2.3-shakl.

Belgilashlar kiritamiz:

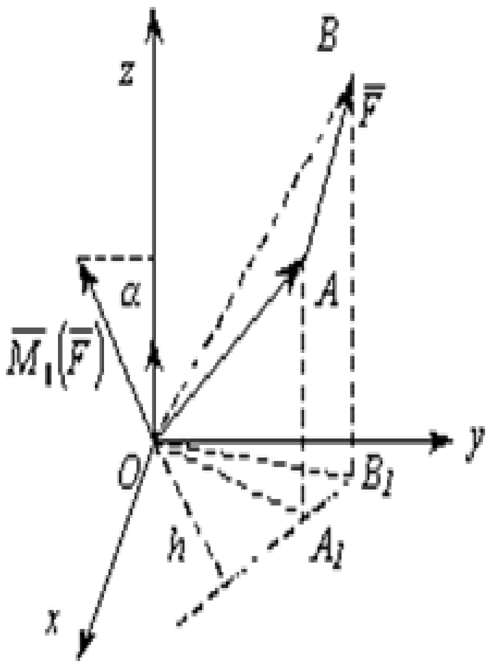
$$M_{0x}(F) = yF_z - zF_y;$$
$$M_{oy}(F) = zF_x - xF_z; \qquad (2.8)$$
$$M_{0y}(F) = xF_y - yF_x$$

$\overline{M}_0(\overline{F})$ ning miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$|\overline{M}_0(\overline{F})| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \qquad (2.9)$$

Uning yo'nalishi kosinuslar qoidastga asosan topiladi:

$$\cos(\overline{M}_0 \hat{\ } x) = \frac{Mox}{|\overline{M}_0(\overline{F})|}; \ \cos(\overline{M}_0 \hat{\ } y) = \frac{Moy}{|\overline{M}_0(\overline{F})|}; \ \cos(\overline{M}_0 \hat{\ } z) = \frac{Moz}{|\overline{M}_0(\overline{F})|} \qquad (2.10)$$



2.4-shakl

Endi kuchning tekislikdagi proektsiyasi teshenchasini kiritamiz. Aytaylik $\overline{F}$ kuchi va tekislik berilgan bo'lsin. Kuchning boshi va ohiridan bu tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, u holda $\overline{F}$ kuchni XOU tekislikdagi proektsiyasi $\overline{F}_{XY}$ deb belgilanadi. Uning O nuqtaga nisbatan momenti

$$M_0(F_{xy})=(xF_Y-yF_X)\ \overline{K} \qquad (2.11)$$

bo'ladi. Bunda $Z=0$, $F_z=0$

SHunday qilib $\overline{M}_0(\overline{F}_{xy})$ momenti vektori z o'qi bilan bo'ylab yo'nalgan bo'ladi va uning z o'qidagi proektsiyasi, $\overline{F}$ kuchning *O* nuqtaga nisbatan momenti vektorining z o'kidagi proektsiyasi bilan ustma-ust tushadi. Agar kuchning *OX*, *OU* va *OZ* o'qiga nisbatan momentlarini $M_x(\overline{F})$, $M_y(\overline{F})$ va $M_z(\overline{F})$ desak, $M_x(\overline{F})=M_{ox}(\overline{F})$, $M_y(\overline{F})=M_{oy}(\overline{F})$, $M_z(\overline{F})=M_{oz}(\overline{F})$ bo'ladi.

$$\left|\overline{M}_0(\overline{F})\right| = M_{0z}(\overline{F}) = M_{oz}(\overline{F}_{xy}) = xF_y - yF_x \qquad (2.12)$$

yoki $M_z(\overline{F}) = \left|\overline{M}_0(\overline{F})\right| \cos\alpha$

KUCHNING BIROR O'QQA NISBATAN MOMENTI KUCHNING SHU O'QDA YOTUVCHI NUQTAGA NISBATAN MOMENTI VEKTORLARINI MAZKUR O'QDAGI PROEKTSIYASIGA TENG.

(2.12) dan quyidagi natija chiqadi:

Agar kuchning yelkasi h=0 bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti 0 ga teng.

Agar kuch o'qqa parallel bo'lsa, kuchning o'qqa nisbatan momenti 0 ga teng bo'ladi.

Agar kuchning ta'siri chizig'i o'qni kesib o'tsa, kuchning o'qqa nisbatan momnti 0 ga teng bo'ladi(h=0).

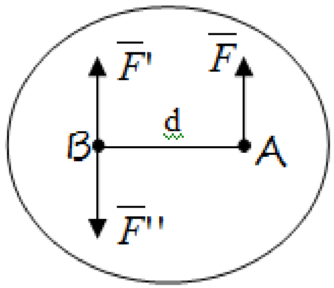
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

1. Kuchni o'ziga parallel ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishga oid teorema

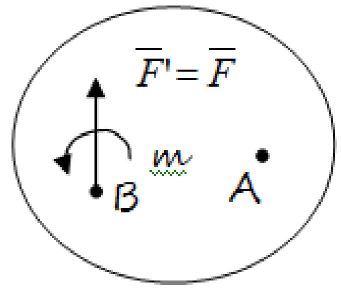
Absolyut qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay o'ziga parallel ravishda boshqa ixtiyoriy nuqtaga keltirish, momenti berilgan kuchdan keltirish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan juft qo'shishni taqozo qiladi

Isbot:

Jismning biror A nuqtasiga F kuch qo’yilgan bo’lsin.



2.5-shakl.

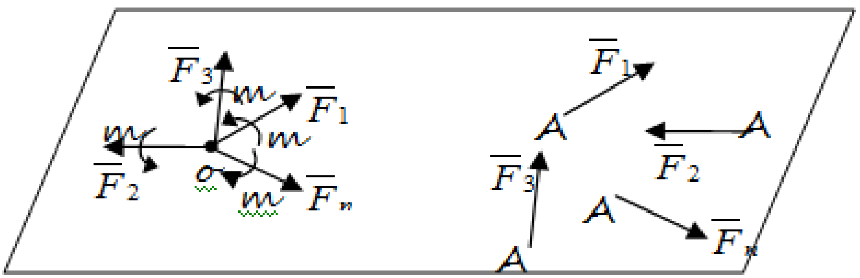


2.6-shakl.

Jismning ixtiyoriy B nuqtasiga (AB=d) tashkil etuvchilari F' va F'' miqdor jihatidan F kuchga teng bo’lgan ya’ni $F' = F'' = F$ nolli sistemani kuchga parallel ravishda qo’yamiz (2.5-shakl). Hosil bo’lgan uchta kuchdan ($\bar{F}, \bar{F}', \bar{F}''$) iborat bo’lgan sistema berilgan F kuchga ekvivalentdir. Bu sistemani F kuch va ($\bar{F}, \bar{F}''$) juftdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Binobarin A nuqtaga qo’yilgan F kuchi, B nuqtaga qo’yilgan shunday F' kuchiga va ($\bar{F}, \bar{F}''$) juftga ekvivalentdir. Juft ($\bar{F}, \bar{F}''$) ni qo’shilgan juft deb ataladi. Uning momentini aniqlaymiz $\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}'') = F \cdot d = m_B(\bar{F})$.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

Bosh vektor va bosh moment. Qattiq jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir qilsin.



2.7-shakl.

Tekislikda keltirish markazi deb ataluvchi ixtiyoriy O nuqtani olib, momentlari m_1, m_2, m_n bo'lgan qo'shilgan juftlarni qo'shib, hamma kuchlarni shu markazga keltiramiz, (2.7-shakl). Demak $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$. Kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}_1', \overline{F}_2', \ldots, \overline{F}_n'$ kuchlar sistemasiga va bir tekislikda joylashgan momentlari

$$m_1 = m_0(\overline{F}_1),\ m_2 = m_0(\overline{F}_2) \ldots m_n = m_0(\overline{F}_n) \qquad (2.13)$$

bo'lgan juftlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

O nuqtaga qo'yilgan kuchlarni qo'shib, ularni bitta kuch bilan almashtiramiz.

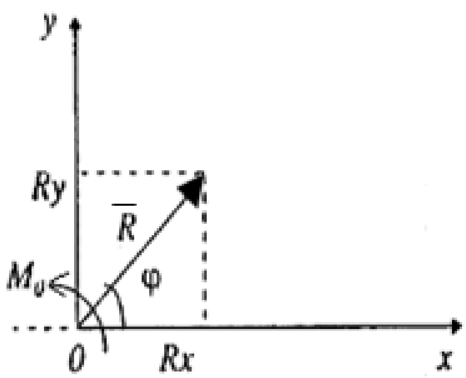
$$\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (2.14)$$

Modomiki $\overline{F}_k' = \overline{F}_k$, u holda $\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ kattalik berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladi. Binobarin tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng ekan. Tekislikda joylashgan qo'shilgan juftlarni jamlab, momenti $M_0=m_1+m_2+\ldots+m_n$ bo'lgan bitta juft bilan almashtiramiz. Formula (2.13)ni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M_0 = m_0(\overline{F}_1) + m_0(\overline{F}_2) + \ldots + m_0(\overline{F}_n)$$

yoki

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) \tag{2.15}$$



2.8-shakl.

Bosh vektor R' ni miqdor va yo'nalishini analitik aniqlash. Koordinata sistemasi boshini keltirish markazi O nuqtada olib OX va OY o'qlarini o'tkazib, R' ning miqdorini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz.

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2} \qquad (2.16)$$

Bu yerda R'_x va R'_y bosh vektor R' ning koordinata o'qlaridagi proektsiyalaridir (2.14). Tenglikni koordinata o'qlariga proektsiyalab, quyidagini olamiz:

$$R'_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \; R'_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \qquad (2.17)$$

Ya'ni kuchlar sistemasi bosh vektorining koordinata o'qlaridagi proektsiyalari, kuchlarning shu o'qlardagi proektsiyalarining algebraik yig'indisiga tengdir. Formula (2.16)ga R'_x, R'_y larning qiymatlarini (2.17) formuladan keltirib qo'yib, quyidagini olamiz

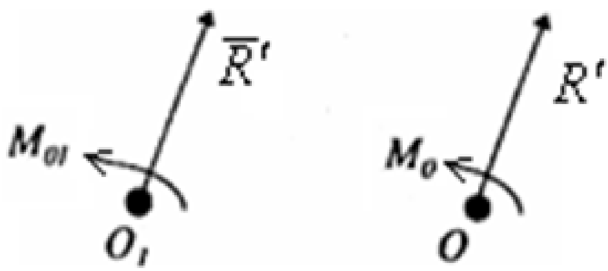
$$R' = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2} \qquad (2.18)$$

Bosh vektor R' ning yo'nalishi, uni OX o'qi bilan tashkil qilgan φ burchagi orqali quyidagicha aniqlanadi

$$tg\varphi = \frac{R'_y}{R'_x} \tag{2.19}$$

SHuni ta'kidlaymizki, bosh vektor R' keltirish markazini o'zgartirish bilan o'zgarmaydi, chunki berilgan kuchlar sistemasining miqdor va yo'nalishlari o'zgarmas qoladi.

Keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi. Berilgan $(F_1, F_2, .., F_n)$ kuchlar sistemasini bir O markazga keltirib, O nuqtaga qo'yilgan R' kuchni va momenti M_o bo'lgan juftni olamiz (2.9-shakl).



2.9-shakl.

Keltirish markazi uchun boshqa O_1 nuqtani olamiz va bu nuqtaga nisbatan bosh momentni M_{o1} deb belgilaymiz. R' kuchni O nuqtadan O_1 nuqtaga ko'chirish uchun momenti O_1 nuqtaga qo'yilgan R' kuchdan O_1 nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan ya'ni $m_{o1}(R')$ juftni qo'shish kerak. Bu juftni kuchlar sistemasining *O* ga keltirish natijasida hosil bo'lgan juft bilan qo'shib, momenti quyidagiga teng bo'lgan bitta juft hosil qilamiz

$$M_{01} = M_0 + m_{01}(\overline{R}') \qquad (2.20)$$

bundan

$$M_{01} - M_0 = m_{01}(\overline{R}') \qquad (2.21)$$

Demak, keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi oldingi markazga qo'yilgan bosh vektordan, keyingi markazga nisbatan olingan momentga teng bo'lar yekan.

2. Keltirishning xususiy hollari. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda hollarga keltirish. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirishda quyidagi xususiy hollar mavjud

$$1)\ \overline{R}' = 0,\ M_0 \neq 0$$

$$2)\ \overline{R}' \neq 0,\ M_0 = 0$$

$$3)\ \overline{R}' \neq 0,\ M_0 \neq 0$$

$$4)\ \overline{R}' = 0,\ M_0 = 0$$

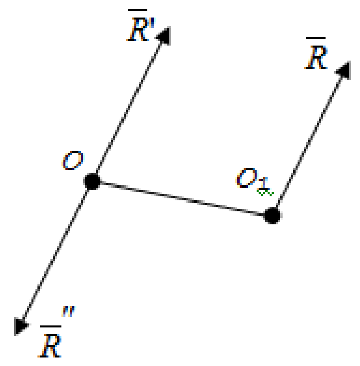
Kuchlar sistemasini bir juftga keltirish.

Agar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori nolga teng bo'lib, biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bir juftga keladi. Bunday holda bosh momenti keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham, agar R'=0 bo'lsa, u holda (2.21) formuladan $M_{01}=M_0$ ekanligi kelib chiqadi.

Kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirish. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida teorema

Agar kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi (2 va 3 xususiy hollar). Agar ($\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$) kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bitta kuch $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ va momenti $M_0 = \sum m_0(\bar{F}_k)$ bo'lgan bitta juft hosil bo'lsin. Juft tashkil etuvchi kuchlar miqdorini bosh vektorga teng qilib olib, ya'ni, $\bar{R}' = \bar{R}'' = \bar{R}$ va juft tashkil etuvchi kuchlardan birini O nuqtaga R' bilan qarama-qarshi yo'nalishda joylashtiramiz (2.10-shakl) juft $(\bar{R}_1, \bar{R}'')$ ning yelkasi quyidagi formuladan aniqlanadi.

$$d = \frac{M_0}{R} \tag{2.22}$$



Teng ta'sir etuvchining momentiga oid Varinon teoremasi.

Teorema:

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot:

2.7-shakldan ko'rinadiki, $m_0(\overline{R}) = R \cdot d$. $R = R'$ ekanligi va (2.22) formulani e'tiborga olib quyidagini yozish mumkin

$$m_0(\overline{R}) = M_0 \quad yoki \quad m_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) \qquad (2.23)$$

Teorema isbotlandi.

E’TIBORINGIZ UCHUN RAXMAT!