5-MAVZU. TASODIFIY XATOLIKLAR NAZARIYASINING AYRIM TUSHUNCHALARI.

LECTURE 5: SOME CONCEPTS OF RANDOM ERROR THEORY

REJA:

1. **Tasodifiy qiymatlar to'plamining sonli tavsiflari.**
2. **Ishonchli intervalni aniqlash.**
3. **O'lchovlarning kerakli soni.**
4. **Ishonarli ehtimollikdagi tasodifiy xatolik olish uchun o'lchovlarning zarur soni**

Tayanch iboralar:

Tasodifiy sonlar, o'rtacha qiymat, dispertsiya, variatsiya koeffitsienti, Styudent koeffitsienti .

Ma'ruza maqsadi: *Tadqiqotlar natijasida olingan statistik ma'lumotlarni tahlil qilish o'rganish.*

1. TASODIFIY QIYMATLAR TO'PLAMINING SONLI TAVSIFLARI.

Asosiy sonli tavsiflarni aniqlashdan oldin hisoblashlarni soddalashtirish va tezlashtirish uchun tasodifiy qiymatlarga dastlabki ishlov beriladi. Bunday ishlov quyidagilardan iborat:

1. Agar tajriba natijalari kasr sonlar ko'rinishida bo'lsa, ular ma'lum bir doimiy songa ko'paytirilib butun sonlarga aylantiriladi.

2. Agar qiymatlar ko'p sonli bo'lib, bir-biridan faqat oxirgi sonlari bilangina farqlansa, u sonlarning doimiy qismini olib qo'yish mumkin.

Masala. O'lchov natijasida quyidagi qiymatlar olindi:

8,35; 8,09; 8,93; 8,64; 8,37; 8,71; 8,19; 8,24; 8,64; 8,32

Bu sonlarni 100 ga ko'paytirib, so'ngra 800 ni ayirib quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

35, 9, 93, 64, 37, 71, 19, 24, 64, 32.

Bu to'plamning o'rtacha qiymati hisoblangandan so'ng 800 ni qo'shib 100 ga bo'linadi.

Tasodifiy qiymatlarning asosiy sonli tavsiflariga quyidagilar kiradi: o'rtacha qiymat, dispersiya, variatsiya koeffitsienti.

O'rtacha qiymat – tasodifiy qiymatlar taqsimotining markazini aniqlaydi. Bu markaz atrofida qiymatlarning asosiy qismi jamlanadi. Bu tavsif (1.14) formula bo'yicha hisoblanadi.

Dispersiya – taqsimot markazi atrofida tasodifiy qiymatlar tarqalishining absolyut tavsifidir. Dispersiya quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi [1,3,4]:

$$D\{Y\} = \frac{1}{m-1}\sum (Y_i - \bar{Y})^2 \qquad (1.17)$$

$S\{Y\}$ – o'rtacha kvadratik xato $S\{Y\} = \sqrt{D}$.

Variatsiya koeffitsienti – tasodifiy qiymatlar tarqalishining nisbiy tavsifidir. Bu tavsif quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi [4]:

$$C_V\{Y\} = S\{Y\}/\bar{Y} \qquad (1.18)$$

Agar bu tavsif foiz ko'rinishida bo'lsa **kvadratik notekislik** deb ataladi [6]:

$$C\{Y\} = S\{Y\}100/\bar{Y} \qquad (1.19)$$

SHunday qilib, tadqiqotchi dastlabki tajribani o'tkazib uning natijalariga ishlov beradi. Olingan natijalar tahlil qilingach (agar zarur bo'lsa) asosiy tajriba rejasiga o'zgartirish kiritadi.

O'lchovlar soni oldindan aniqlash aniqligini amaliy jihatdan talab etiladigan qiymati bilan mos tushishiga va birlik o'lchashdagi olinadigan aniqlikka bog'liq bo'ladi. O'lchovlarning kerakli sonini asoslash uchun olinadigan natijalar aniqligini aniqlay olish zarur. Ushbu maqsadda dastlab tasodifiy xatoliklar nazariyasidan ba'zi-bir ma'lumotlarni ko'ramiz, shu jumladan, ba'zi-bir tushunchalarni, ishonarli oraliqlar va ehtimollarni aniqlashni ko'rib chiqamiz.

Tasodifiy xatoliklar asosiy ahamiyatga ega bo'lgan o'lchashlarda, o'lchash aniqligining hamma baholarni faqat qandaydir ehtimollik bilan bajarish mumkin. Tasodifiy xatolar matematik kutilmasi nolga teng bo'lgan taqsimlanish qonuniga ega. Ehtimollar nazariyasi xatolikning har qanday kattaligi ehtimolligini hisoblash imkonini beradi. Agar har bir o'lchash, boshqa o'lchashlardan biroz farq qiluvchi natijalar bersa, bunda tasodifiy xatolik asosiy ahamiyatga ega bo'ladi. O'lchanayotgan kattalikning ehtimolligini ko'proq qiymati qilib (xatoliklarning me'yorida taqsimlanish qonunida) uning o'rtacha arifmetik qiymati olinadi [2]:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1.20)$$

bu yerda: x_1 , x_2 ,... , x_n - alohida o'lchashlar natijalari.

O'tkazilgan o'lchashlar aniqligi haqidagi fikrni o'lchov natijalarining tebranish kattaligi bo'yicha olish mumkin: o'lchov natijalari qatorda qanchalik tarqalgan bo'lsa, ular bir-biridan keskin farq qilib, o'lchashlar shunchalik aniqmas bo'ladi. O'lchash tasodifiy xatoligining qiymatini baholashni bir necha usullari mavjud. Ba'zan o'rtacha arifmetik xatolik qo'llaniladi. Standart yoki o'rtacha kvadratik xatolik yordamida baholash keng tarqalgan (uni ko'proq o'lchash standarti deb ataladi). O'rtacha kvadratik xatolik o'lchashlar sharoitlarini tavsiflaydi.

O'rtacha kvadratik xatolik deb quyidagiga aytiladi [8]:

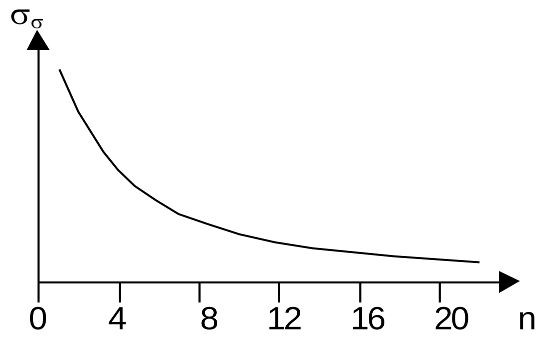
$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(m - x_1)^2 + (m - x_2)^2 + \cdots + (m - x_n)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m - x_i)^2}{n-1}} \qquad (1.21)$$

$n \to \infty$ bo'lganida, tasodifiy tebranishlar orqali tasdiqlangan kattalik qandaydir doimiy σ qiymatga intiladi, uni statistik chegara deb atash mumkin.

$$\sigma^*, \sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma^* \qquad (1.22)$$

Aynan shu chegarani o'rtacha kvadratik xatolik deb aytamiz va ushbu kattalikning kvadrati o'lchovlar dispersiyasi deyiladi. Haqiqatan ham har doim σ qiymatni emas, balki uning yaqinlashtirilgan qiymati σ^* hisoblanadi. U qanchalik σ ga yaqin bo'lsa, n shunchalik katta bo'ladi. O'lchovlarning qatori cheksiz bo'lmagani uchun, standart, o'rtacha kvadratik chetlanish doimo noma'lum bo'lib qolaveradi. SHuning uchun uning yaqinlashtirilgan qiymati σ^* dan foydalanishga to'g'ri keladi va u o'z navbatida σ_σ o'rtacha kvadratik xatolikdan aniqlanib, keltirilgan formuladan nisbiy ifodadan hisoblab topiladi [9]:

$$\sigma_{\sigma^*} = \sigma \cdot \sqrt{2(n-1)} \quad \text{yoki} \quad \frac{\sigma_\sigma}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2(m-1)}} \qquad (1.23)$$



2-rasm [4]. O'rtacha kvadratik chetlanish σ_σ xatoligining o'lchashlar soni n ga bog'liqligi.

O'lchovlar soni n oshishi bilan $\sigma_{\sigma^*} = \varphi(n)$ egri chizig'i abtsissa o'qiga yaqinlashib boradi, bunda ushbu yaqinlashish (taxminan n=10 gacha) aniq intervalda juda tez kechadi. O'lchovlar conining keyingi oshishi o'rtacha kvadratik xatolik qiymatini juda oz darajada aniqlashtiradi. SHunday qilib o'rtacha kvadratik xatolik n ning qandaydir qiymatida barqaror qiymatga erishadi (2-rasm).O'rtacha kvadratik xatolikning o'rtacha arifmetik kattalik m bilan solishtirilganda foizlar bilan ifodalangan ω nisbiy kattaligi - variatsiya koeffitsienti deb nomlanadi.

$$\omega=100\sigma^*/m \,\% \qquad (1.24)$$

Agar o’lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini *x* orqali belgilasak, bunda ushbu kattalikni o’lchash xatoligi Δx, o’lchash natijalariga ko’ra o’rtacha arifmetik qiymati - m bo’ladi. O’lchash natijasini xaqiqiy qiymatdan Δx dan ortiq bo’lmagan kattalikka farq qilish ehtimolligi β bo’lsa, unda $p(-\Delta x < x-m < \Delta x)=\beta$ yoki $p(m-\Delta x < x < m+\Delta x)=\beta$ deb yozish mumkin. Ehtimollik β - ishonarli ehtimollik yoki ishonchlilik koeffitsienti deb nomlanadi. Qiymatlarning $m+\Delta x$ dan $m-\Delta x$ gacha bo’lgan oralig’i ishonchlilik oralig’i deb nomlanadi.

Yuqorida aytilganlardan ko’rinib turibdiki, tasodifiy xatolik qiymatini tavsiflash uchun ikkita son, chunonchi xatolik kattaligining o’zini yoki ishonchlilik oralig’ini va ishonarli ehtimollik qiymatini berish lozim. Oddiy o’lchashlarda 0,9 yoki 0,95 ishonarli ehtimollik bilan cheklanish mumkin. O’lchash xatoligi Δx ni odatda standart bilan, $\Delta x=t_\beta\sigma_m$ matematik kutilmali o’rtacha kvadratik xatolik σ_m bilan taqqoslanadi. Bu yerda: t_β – koeffitsient. Matematik kutilmaning o’rtacha kvadratik xatoligi, kattaligi jihatdan, alohida natijalar o’rtacha kvadratik xatoligini n o’lchashlar sonidan chiqarilgan kvadrat ildizga bo’linmasiga teng

$$\sigma_m^* = \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} \qquad (1.25)$$

$m = x_1/n + x_2/n + ... + x_n/n$ bo’lganligidan, teng aniqlikdagi o’lchashlar uchun yig’indi dispersiyasi $\left(\sigma_m^*\right)^2 = \frac{h\left(\sigma^*\right)^2}{n}$ dispersiyalar yig’indisiga teng bo’ladi. Ko’rinib turibdiki, aniqlikni 2 marta oshirish uchun, o’lchashlar sonini 4 marta oshirish lozim [10].

Amaliy ish jarayonida alohida o’lchashning o’rtacha kvadratik xatoligini va o’rtacha arifmetigining o’rtacha kvadratik xatoligini ajrata bilish kerak. So’nggi aytilgan parametr o’tkazilgan barcha o’lchovlar natijalarida olingan qiymat xatoligini baholashda ishlatiladi. σ^* xatolik qiymati qo’llanilayotgan o’lchash usulining aniqligini tavsiflaydi.

SHunday qilib, agar o’lchashlar usulining xatoligi va tajribalardagi o’lchovlarning talab etilgan natijaviy xatoligi ma’lum bo’lsa, talab qilinayotgan xatoliklar dispersiyasidan, usul xatoligining dispersiyasi necha marta katta bo'lganiga qarab, shuncha marta o'lchashlarni o'tkazish lozim. O'lchovlarning kerakli sonini tanlashda usulning muntazam xatoligini yetarlicha kichik deb olinadi. Tasodifiy xatolik kattaligini tavsiflash uchun nafaqat xatolik kattaligini, balki ishonarli ehtimollik kattaligini ham bilish lozim.

2. *ISHONCHLI INTERVALNI ANIQLASH.*

Ma'lumki, o'lchashlar xatoligi odatda me'yorida (normal) taqsimlanish qonuniga bo'ysunadi. SHuning uchun o'lchovlar natijasining matematik kutilmasi m bo'lsa, 68% qiymatlar $m=\pm\sigma_m$ intervalda yotadi; $m\pm2\sigma_m$ intervalida 95% o'lchovlar yotadi. Yoki umumiy holda: β% o'lchovlar $m\pm t_\beta\sigma_m$ intervalida joylashadi. Ushbu intervalni ma'lum va yanada tushunarliroq $m\pm\Delta m$ bilan ifodalash mumkin, bu yerda: $\Delta m=t_\beta\sigma_m$.

Ko'rinib turibdiki, juda ko'p o'lchovlar bajarilganda aniqlangan qiymat (aniqrog'i $t_\beta\sigma_m^*$)ga β% ning ma'lum qiymatlari mos keladi ($\Delta m=\pm\sigma_m^*$, β=68%; $\Delta m=\pm2\sigma_m^*$, β=95%). Normal taqsimlanish qonuniga binoan jadval tuzilgan bo'lib, unda t_β va tegishli bo'lgan β qiymatlar ko'rsatilgan. Jadval yordamida, t_β ni bilgan holda, β ni aniqlash mumkin, yoki aksi, β ni qabul qilib, ushbu qiymat uchun t_β ni, σ_m ning ma'lum qiymatida esa Δm ni ham aniqlash mumkin. Ushbu jadval va munosabatlar o'lchovlarning katta sonida o'rinli bo'ladi. O'lchashlarning kichik n sonida boshqa jadval kerak bo'lib, unda t_β kattalik faqat β ga emas, balki n ga ham bog'liq bo'ladi. Buni kengroq yoritamiz.

O'lchovlarning qandaydir soni uchun tanlanma dispersiyasi aniqlangan va berilgan ishonarli interval ±Δm uchun tegishli β ishonarli ehtimollikning o'rtacha qiymatini aniqlash kerak bo'lsin. Agar $\Delta m/\sigma_m$ ni t_β orqali ifodalasak, σ^* -birlik o'lchashning o'rtacha kvadratik xatoligi bo'lsa, unda $t_{\beta n}=\Delta m/\sigma_m^*=\Delta m\sqrt{n}/\sigma^*$ bundan $\Delta m=\dfrac{t_{\beta n}\sigma^*}{\sqrt{n}}$ kelib chiqadi [11].

2-jadval [6]. **Styudent koeffitsienti qiymatlari**

Tajribalar soni n	Ishonarli ehtimollik β			Tajribalar soni n	Ishonarli ehtimollik β		
	0,7	0,9	0,95		0,7	0,9	0,95
2	2,0	6,3	12,7	10	1,1	1,8	2,3
3	1,3	2,9	4,3	11-12	1,1	1,8	2,2
4	1,3	2,4	3,2	13-14	1,1	1,8	2,2
5	1,2	2,1	2,8	15-16	1,1	1,8	2,1
6	1,2	2,0	2,6	17-27	1,1	1,7	2,1
7	1,1	1,9	2,4	28-40	1,1	1,7	2,0
8	1,1	1,9	2,4	41-59	1,1	1,7	2,0
9	1,1	1,9	2,3	60-120	1,0	1,7	2,0

O'lchovlarning kichik sonida o'rtacha kvadratik xatolik kichik aniqlik bilan topiladi, Δm ning bir xil, n ning har xil qiymatida $t_{\beta n}$ har xil bo'ladi. $t_{\beta n}$ kattaliklar Stьyudent koeffitsientlari deyiladi va ehtimollik nazariyasi qonunlariga ko'ra n va β ning turli qiymatlarida hisoblanadi. Ushbu nisbatlar va 2-jadvaldan foydalanib, qabul qilingan ishonarli ehtimollik va o'lchovlarning ma'lum sonida ishonarlilik intervalini oson aniqlash mumkin. O'lchovlarning ko'plab sonida (amaliy n>30) σ^* o'rniga σ va $t_{\beta n}$ o'rniga t_β ni qo'llash mumkin.

3. *O'LCHOVLARNING KERAKLI SONI.*

Yuqorida aytib o'tilganidek, agar birlik o'lchash xatoligi va oxirgi natijaviy ruxsat etilgan xatolik ma'lum bo'lsa, birlik o'lchash xatoligi dispersiyasi, ruxsat etilgan dispersiyadan qancha katta bo'lsa, shuncha o'lchovlarni o'tkazish lozim. Agar usulning muntazam xatoliklari kichik bo'lsa, ushbu usulni qo'llash mumkin. Agar muntazam xatoliklar katta bo'lsa, boshqacha yo'l tutiladi. Aytaylik o'lchovlarning muntazam xatoligi δ' bo'lsin. Ma'lumki, tasodifiy xatolikni, o'lchovlarning umumiy xatoligini to'liq muntazam xatoliklar bilan aniqlanadigan bo'lguncha, kamaytirish mumkin. Buning uchun, qabul qilingan ishonarli ehtimollikda, ishonarli interval muntazam xatolikdan ancha kichik bo'lishi kerak. Odatda umumiy xatolikni 10% katta qiymatda aniqlash zaruriyati yo'q, chunki $\Delta m=0,1\cdot\delta'$. Amaliy jihatdan $\Delta m<\delta'/3$ yoki $\Delta m<\delta'/2$ bo'lishi yetarli.

Qabul qilingan ishonarli ehtimollikda o'lchovlarning kerakli miqdorini 3-jadval yordamida baholash mumkin. Unda tasodifiy xatolik qiymati $\pm\Delta m$ birlik o'lchashning o'rtacha kvadratik xatoligi ulushlarida berilgan, ya'ni $\Delta m=t'_{\beta n}\sigma^*$ bu yerda: σ^* - birlik o'lchash o'rtacha kvadratik chetlanishi; $t'_{\beta n}$, Styudent koeffitsienti $t_{\beta n}$ ga o'xshash koeffitsient bo'lib, kattaligi jihatidan boshqacha

$$t^*_{\beta n} = \frac{t_{\beta n}}{\sqrt{n}}, \text{ chunki } \quad \sigma^* = \sigma^*_m \sqrt{n}.$$

4. ISHONARLI EHTIMOLLIKDAGI TASODIFIY XATOLIK OLISH UCHUN O'LCHOVLARNING ZARUR SONI

$t'_\beta = \frac{\Delta m}{\sigma^*}$	Ishonarli ehtimollik β				
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
1,0	2	3	5	8	11
0,5	3	6	13	13	31
0,4	4	8	19	27	46
0,3	6	13	32	46	78
0,2	13	25	70	100	170
0,01	47	110	270	390	700

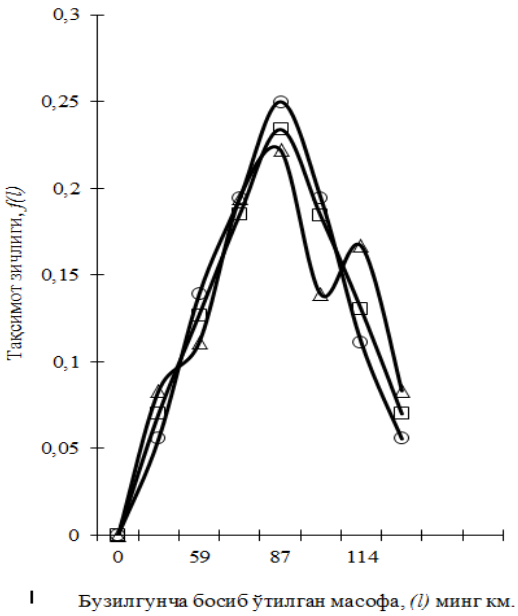
3-jadval [12]. **β ishonarli ehtimollikdagi tasodifiy xatolik olish uchun o'lchovlarning zarur soni**

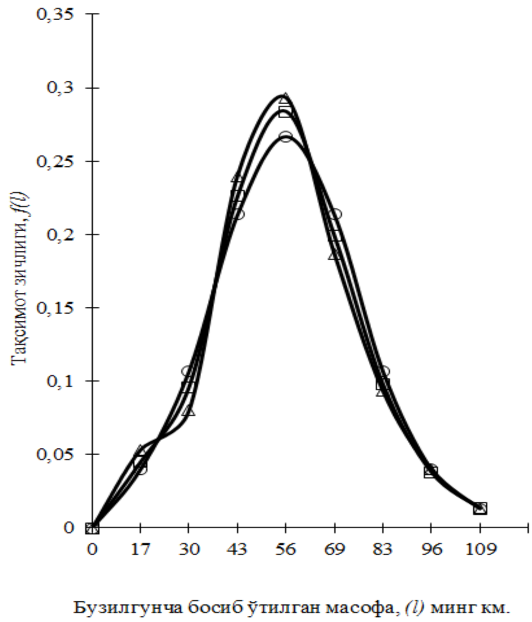
O'lchovlar sonini oshirish bilan, natijaga tasodifiy xatolikning ta'sirini yo'qotish mumkin, agar birlik o'lchash o'rtacha kvadratik xatoligi muntazam qiymatidan 5 martagacha katta bo'lsa; σ^* ning katta qiymatlarida natija xatoligini kamaytirish uchun, Δm tasodifiy qiymatini, uning birlik o'lchashdagi xatoligi umumiy ulushini kamaytirish uchun esa, o’lchashlar usulini tubdan o’zgartirish kerak.

O’lchovlar sharoitini oqilona tanlash zarur, bunda har bir zvenoning nisbiy xatoligi deyarli bir xil bo’lishi kerak. Aks holda natijalar aniqligi, jumladan, o’lchovlar miqdori odatda o’lchash aniqligi kichik bo’lgan qiymat bilan beriladi. Kerakli aniqlikni baholashni o’lchovlar sharoiti va omillarini diqqat bilan tekshirib, so’ngra amalga oshirish kerak. So’nggi natijaga ta’sir etuvchi o’lchovlar sharoiti va omillar tahlili, yaratilayotgan oldindan aniqlash uslubiyatiga kirgan va xususan detallar, tutashmalar yeyilishini o’lchash uslubiga kiritilgan bo’lishi zarur. Olingan tajriba ma’lumotlarni statistik tahlil qilinadi, turli mezonlar yordamida bog’liqliklarni va uning parametrlarini, korrelyatsiyalash koeffitsienti yordamida olingan ma’lumotlarning tegishli bog’liqliklari va korrelyatsion nisbatlari olinadi, parametrlar xatoliklari baholanadi. Tajriba tadqiqotlar kuzatishlar natijalarining sonli tahlilida olingan qiymatlarning bir jinsliligi, bir xil bog’liqlikka asoslanishi, qabul qilingan turga ko’ra taqsimlanishi ko’riladi. O’zgaruvchan qiymatlar orasidagi bog’liqlik borligi aniqlanadi, ushbu bog’liqlik shakli (matematik modeli) va uning parametrlari, olingan qiymatlarning aniqligi, xususan bog’liqlik parametrlari qiymatining xatoliklari baholanadi.

SHunday qilib, tajriba tadqiqotlar, kuzatuvlar natijalarini tahlil qilishda; olingan qiymatlarning bir jinsliligini tekshirish; o’zgaruvchan qiymatlar o’rtasidagi o’rtacha bog’liqlikni topish, buning uchun ma’lum analitik va tajriba bog’liqliklarini parametrlarini baholash va qiymatini aniqlash; tajriba va analitik qiymatlarning muvofiqlik darajasi; olingan qiymatlarni grafik usulda tasvirlash.

Olingan qiymatlar tahlilining natijalariga ko’ra o’lchashlarni ko’plab miqdorda o’tkazilishi kerakligi yoki mavjudlari bilan qoniqish mumkinligi kelib chiqadi.





FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

REFERENCES:

1. Klaus Hinkelmann, Ockar Kempthorne. Design and Analysis of Experiments. Volume 1. Introduction to Experimental Design. Wiley, 2008.
2. Klaus Hinkelmann, Ockar Kempthorne. Advanced Experimental Design. Volume 2. Introduction to Experimental Design. Wiley, 2005.
3. Махкамов К.Х. Машиналар пухталиги. ўкув кулланма. Тошкент, ТошДТУ, 1999. 96 б.
4. Основы научных исследований. Под. ред. Крутикова В.И. и Попова В.В. - Москва: "Высшая школа", 1989.
5. Рашидов Н.Р., Закин Х.Я. Основы научного исследования. -Ташкент: Ўкитувчи, 1979. -184 с.
6. Авдонькин Ф.Н. Теоретические основы технической эксплуатации автомобилей. Москва: Транспорт, 1985. -215 с.
7. Бородин В.Л., Вощинин П.А., Иванов А.З. и др. Статистические методы в инженерных исследованиях. -Москва: Высшая школа, 1983.
8. Венцель С.С. Теория вероятностей. - Москва: Наука, 1969.
9. Волков Е.А. Численные методы. -Москва, 1987. 248 с.

10. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - Москва: Наука, 1982. 286 с.

11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -Москва: 1980. - 536 с.

12. Теория прогнозирования и принятия решений. Под. ред. С.А.Саркисяна.-Москва: Высшая школа, 1977.-351 с