14-MAVZU: TASODIFIY JARAYONLAR NAZARIYASI
LECTURE 14. RANDOM PROCESS THEORY

Reja:

1. **Tasodifiy jarayonlar nazariyasi umumiy ma’lumotlari.**
2. **Diskret holatli va va diskret vaqtli tasodifiy Markov jarayoni bilan tasvirlanadigan tizimning holatlari ehtimolliklarini aniqlash.**
3. **Tizimning barqarorlashgan tartibi uchun holatlar ehtimolliklari matritsasini aniqlash.**
4. **Statistik modellash usulini optimal yechimlarni aniqlash uchun qo’llash**

Tayanch iboralar:

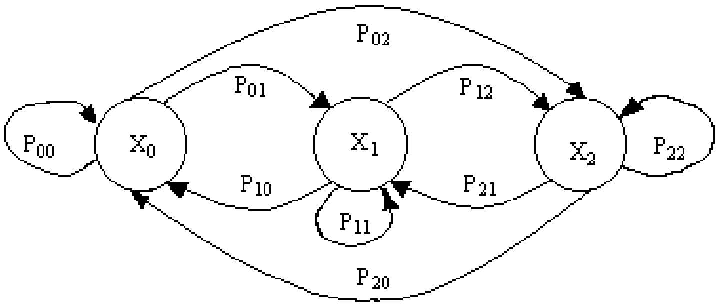
Tasodifiy jarayon, diskret, Markov jarayoni, recurrent formula, statistic modellash, optimal yechim, tizim, diskret vaqtli tasodif, algebraik usul, Monte-Karlo usuli, tavsifiy tenglama.

Ma’ruza maqsadi: Eksprimentlar natijasida olingan tasodifiy jarayonlardagi ma’lumotlarni tahlil qilish nazariyasi tushuntiriladi.

1. TASODIFIY JARAYONLAR NAZARIYASI UMUMIY MA’LUMOTLARI.

Tasodifiy jarayonlar orasida A.A.Markov nomi bilan yuritiladigan jarayon muhim ahamiyatga ega. Tasodifiy jarayon, agar tizimning kelajakdagi ushbu jarayonga javob beruvchi holatini ehtimolligi, faqat hozirgi vaqtdagi holatiga boђliq va u avval qanday holatlarda bo’lganligiga boђliq bo’lmasa Markov jarayoni deb ataladi. SHu munosabat bilan Markov jarayonlarini oqibatsiz jarayonlar deb ham yuritiladi [1].

Markov jarayoni, agar bir holatdan boshqasiga o’tish sakrash orqali, ya’ni juda tez yuz bersa diskret holatlarga ega jarayon deb ataladi. Diskret holatlarga ega Markov jarayoni grafik tarzda holatlar grafi bilan tasvirlanadi. Masalan, ikkita liniyaga ega ATSning holatlar grafi 1-rasmda ko’rsatilgan.



1-rasm. Tizim ixtiyorida ikki liniyasi bo’lgan diskret markov tasodifiy jarayonining holatlar grafi [2].

X_0 - tizimning ikkala liniya bo’sh bo’lgan holati, bu holatning ehtimolligi R_0 bilan belgilanadi;

X_1 - tizimning bitta liniya band bo’lgan holati, bu holatning ehtimolligi R_1 bilan belgilanadi;

X_2 - tizimning ikkala liniya band bo’lgan holati, bu holatning ehtimolligi R_2 bilan belgilanadi;

P_{ij} - tizimning holatdan holatga o’tish ehtimolligi.

Tizimning holati holatlar vektori bilan tavsiflanadi. 21-rasmga qo’llanilganda tizimning holati boshlanђich momentda t=0 bo’lganda bunday yoziladi:

$$P_{\left([холат] \atop K=0 \right)} = \begin{Vmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ P(x_2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Bu boshlanђich paytda tizim x_0 holatda bo’lishining ehtimolligi birga teng ekanligini bildiradi.

Tizimning holatlari ehtimolligi asosida barcha kerakli tavsiflar: band kanallar soni, navbat uzunligi, navbat kutish vaqti va xokazolar aniqlanadi.

O`tish ehtimolliklarining sonli qiymatlari yozilgan holatlar grafini <u>tizim holatlarining belgilangan grafi</u> deb ataladi [3].

1-rasmga qo’llanilganda tizimning holatdan holatga o’tish ehtimolliklari quyidagi matritsa yordamida ifodalanishi mumkin.

$$P_{ij} = \begin{Vmatrix} P_{00} \ P_{01} \ P_{02} \\ P_{10} \ P_{11} \ P_{12} \\ P_{20} \ P_{21} \ P_{22} \end{Vmatrix}$$

Aftidan, har qatordagi o’tish ehtimolliklari yiђindisi birga teng bo’ladi. Tizimning holatdan holatga o’tish momentlarini jarayonning "qadamlari" deb ataladi. Qadam nomeri K (K=0,1,2,3,...,n) belgilanadi.

Tizim holatlarining x_1, x_2, x_3, ... , x_n ketma-ketligi markov zanjiri deb ataladi.

Agar P_{ij} o’tish ehtimolligi qadam nomeriga boђliq bo’lmasa markov zanjiri bir jinsli deb ataladi, aks holda zanjir bir jinsli bo’lmagan deyiladi.

Agar tizimning holatdan holatga o’tishi qat’iy belgilangan, avvaldan qayd etilgan paytlarda sodir bo’lsa, markov jarayoni diskret vaqtli jarayon deb ataladi.

Agar tizimning holatdan holatga o’tishi istalgan, oldindan noma’lum tasodifiy paytda sodir bo’lsa, markov jarayoni uzluksiz vaqtli jarayon deb ataladi.

2. DISKRET HOLATLI VA VA DISKRET VAQTLI TASODIFIY MARKOV JARAYONI BILAN TASVIRLANADIGAN TIZIMNING HOLATLARI EHTIMOLLIKLARINI ANIQLASH.

1. A l g ye b r a i k u s u l.

Algebraik usulning mohiyatini bir jinsli markov zanjiri uchun aniq misolda ko’rsatib beramiz.

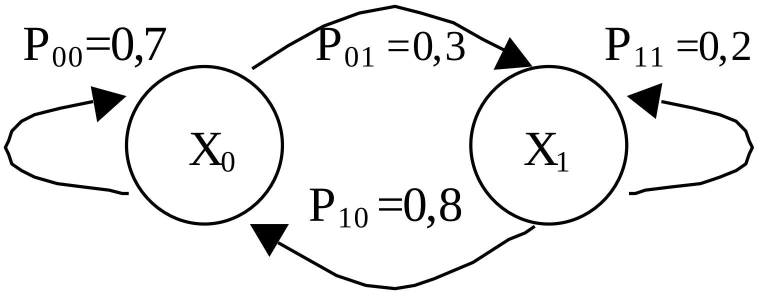
2-misol. Tuzuk va buzuq holatlarda bo’lishi mumkin bo’lgan texnik qurilmani ko’ramiz. Tizimning boshlanђich holat vektori R_{holat} va tizimning o’tish ehtimolliklari matritsasi P_{ij} quyidagidan iborat

$$P_{\left(\substack{холат \\ K=0}\right)} = \begin{Vmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \ ; \quad P_{ij} = \begin{Vmatrix} P_{00} = 0{,}7 \ \ P_{01} = 0{,}3 \\ P_{10} = 0{,}8 \ \ P_{11} = 0{,}2 \end{Vmatrix}.$$

Tizim o’tishining belgilangan grafini qurish va bitta, ikkita va uchta (K=0,1,2 va 3) qadamlardan so’ng tizim holatlarining ehtimolliklarini hisoblash talab etiladi.

Echish.

1. Tizim o’tishining belgilangan grafini quramiz (2-rasm) [4].



2-rasm. Diskret holatlar va diskret vaqtli markov tasodifiy jarayonining belgilangan grafi.

2. Birinchi qadamdan keyingi tizimning holatlari ehtimolligini topamiz. CHamasi, tizimning holatlar vektori birinchi qadamdan keyin (K=1) o’zgaradi va ushbuga teng bo’ladi

$$P_{\left(\substack{холат\\ K=0}\right)} = \begin{Vmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{Vmatrix}$$

Bunda jarayon bir jinsli bo’lgani tufayli tizimning holatdan holatga o’tish matritsasi o’zgarmay qoladi [5].

3. Tizimning ikkinchi qadamdan keyingi holatlari ehtimolligini aniqlaymiz (K=2) [6].

Tizim birinchi qadamdan keyin qanday holatda bo’lganligi ma’lum emasligi sababli, tizimning ikki qadamdan keyingi holatlari ehtimolligini aniqlashda to’liq ehtimollik formulasini qo’llash zarur. Masalan, tizimning ikki qadamdan keyin x_0 holatda bo’lish ehtimolligi bunday yoziladi

$$P_{\left(\substack{холатx_0\\ K=2}\right)} = P(H_0)\cdot p\left(\frac{x_0}{H_0}\right) + P(H_1)\cdot p\left(\frac{x_0}{H_1}\right)$$

bu yerda: $P(H_0)$ - birinchi qadamdan keyin tizim x_0 holatda bo’ldi degan taxminning ehtimolligi;

$P\left(\frac{x_0}{H_0}\right)$ - ikkinchi qadam vaqtida tizim $x_0(R_{00})$ holatda qolishi hodisasining shartli ehtimolligi;

$P(H_1)$ - birinchi qadamdan keyin tizim x_1 holatda bo'ldi degan taxminning ehtimolligi;

$P\left(\frac{x_0}{H_1}\right)$ - ikkinchi qadam vaqtida tizim x_1 holatdan $x_0(R_{10})$ holatga o'tishi hodisasining shartli ehtimolligi.

Ko'rilayotgan misol uchun ehtimolliklarning sonli qiymatlari $P\left(\frac{x_0}{H_0}\right) = 0{,}7$; $P_{00} = 0{,}7$; $P\left(\frac{x_0}{H_1}\right) = 0{,}3$ va $P_{10} = 0{,}8$ ni to'liq ehtimollik formulasiga qo'yib, ushbuni olamiz

$$P_{\left(\substack{холат x_0 \\ K=2}\right)} = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}73 \,.$$

Tabiiyki, $P_{\left(\substack{холат x_1 \\ K=2}\right)}$ ehtimolligi, qarama-qarshi voqeaning ehtimolligi sifatida, ushbuga teng

$$P_{\left(\substack{холат x_1 \\ K=2}\right)} = 1 - P_{\left(\substack{холат x_0 \\ K=2}\right)} = 1 - 0{,}73 = 0{,}27.$$

SHunday qilib, tizimning ikki qadamdan keyingi holatlar vektori bunday yoziladi

$$P_{\left(\substack{холат \\ K=2}\right)} = \begin{Vmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}73 \\ 0{,}27 \end{Vmatrix} .$$

Tizimning uch qadamdan keyingi holatlar ehtimolligi to'liq ehtimolliklar formulasi bo'yicha o'xshash aniqlanadi, masalan

$$P_{\left(\substack{холат x_0 \\ K=3}\right)} = P\left(\frac{x_0}{H_0'}\right) \cdot p(0{,}0) + P\left(\frac{x_0}{H_2'}\right) \cdot p(1{,}0) =$$
$$= 0{,}73 \cdot 0{,}7 + 0{,}27 \cdot 0{,}8 = 0{,}727$$

Demak, tizimning holatlar vektori uch qadamdan keyin ushbu ko’rinishga ega bo’ladi

$$P_{\left(\substack{холат \\ K=3}\right)} = \begin{Vmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}727 \\ 0{,}273 \end{Vmatrix}.$$

Qadamlarning to’rt va undan katta sonlari uchun shunga o’xshash yoziladi.

Barqarorlashgan tartib uchun ushbuni olamiz:

$$P_{\left(\substack{холат \\ K_{баркарор}}\right)} = \begin{Vmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}727272... \\ 0{,}272727... \end{Vmatrix}.$$

2. TIZIMNING "K" QADAMDAN KEYINGI HOLATLARI EHTIMOLLIGINI REKURRENT FORMULA YORDAMIDA ANIQLASH.

Diskret holatli va diskret vaqtli tizimning holatlari ehtimolligi faqat algebraik usul yordamida emas, balki matritsali tenglamadan (ikki matritsa ko’paytmasidan) iborat bo’lgan rekurrent formula yordamida ham aniqlanishi mumkin.

$$P[K] = P_{ij}^T \cdot P[K-1],$$

bu yerda R[K] - tizimning K qadamdan keyingi holatlari vektori;

P^T_{ij} - o’tish ehtimolliklarining transponirlangan matritsasi;

P[K-1] - tizimning K-1 qadamdan keyingi holatlari vektori.

Ushbu CHepmen-Kolmogorov tenglamasi deb ataluvchi formulani ko’rilayotgan misol uchun qo’llab, ushbuni olamiz.

K=1 qadamdan keyin

$$P[1] = P_{ij}^T \cdot P[0] = \begin{Vmatrix} 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{Vmatrix};$$

K=2 qadamdan keyin

$$P[2] = P_{ij}^T \cdot P[1] = \begin{Vmatrix} 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}73 \\ 0{,}27 \end{Vmatrix};$$

K=3 qadamdan keyin

$$P[3] = P_{ij}^T \cdot P[2] = \begin{Vmatrix} 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0{,}73 \\ 0{,}27 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}727 \\ 0{,}273 \end{Vmatrix};$$

K=n qadamdan keyin

$$P[n] = P_{ij}^{T} \cdot P[n-1] = \begin{Vmatrix} 0,7272727272.. \\ 0,2727272727.. \end{Vmatrix} .$$

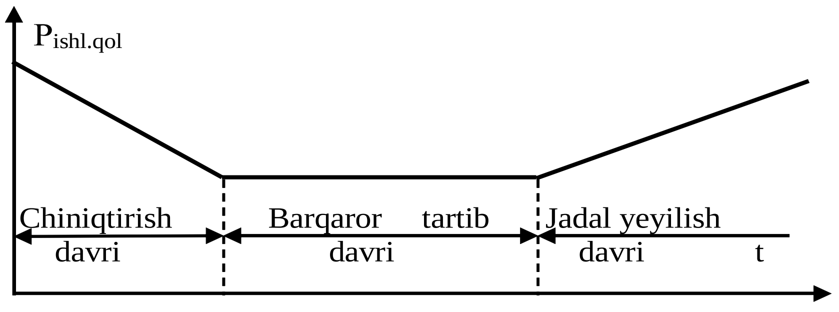
Barqaror tartib mavjudligini aniqlash.

Butun jarayonlar qatori qandaydir yaqinlashuv bilan uch davrga bo’linishi mumkin. Masalan, ba’zi detallarning yeyilish jarayoni quyidagi uch davrga bo’linishi mumkin:

- birinchi davr - detal yuzalarning moslashuvida siyqalanib yeyilishi va ishlamay qolish jadalligi bir oz ko’p bo’ladigan chiniqtirish davri (23-rasm);

- ikkinchi davr - ishlamay qolishlar jadalligi, demak, ishlamay qolishlar ehtimolligi ham, doimiy qiymat oladigan barqaror tartib davri;

- uchinchi davr - detal elementlarining tez eskirishi natijasida boshlanadigan jadal yeyilish davri.



23-rasm. Detalning ishlamay qolish jadalligini foydalanish vaqtiga boђliq o’zgarishi [7].

Barqaror tartibga hamma jarayonlar ham ega emas. Barqaror tartib mavjudligini quyidagi izchillikda tekshiriladi:

1. Agar tizimning P_{ij} holatdan holatga o’tish matritsasida hamma elementlar noldan katta bo’lsa, tekshirilayotgan tizimga javob beruvchi jarayon barqarorlashgan tartibga ega.

2. Agar P_{ij} o’tish ehtimolliklari matritsasida xech bo’lmasa bitta nol bo’lsa, u holda barqarorlashgan tartibni mavjudligini aniqlash uchun: a) tavsifiy

tenglamalar tuzish; b) tavsifiy tenglamaning aniqlovchisini hisoblash va uning ildizlarini topish kerak bo'ladi. Agar bunda tavsifiy tenglamaning bitta ildizi birga teng, qolganlari birdan kichik bo'lsa, barqaror tartib mavjud. Aks holda barqaror tartib mavjud emas.

3-misol. Tizimning o'tish ehtimolliklari matritsasi berilgan.

$$P_{ij} = \begin{Vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2 \end{Vmatrix}.$$

Barqarorlashgan tartib mavjudligini aniqlash talab etiladi.

Echish. 1. Tavsifiy tenglama tuzamiz.

$$\begin{Vmatrix} 0,8-\lambda & 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,6-\lambda & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2-\lambda \end{Vmatrix} = 0.$$

2. Tavsifiy tenglamaning aniqlovchisini, masalan, o'ngga qator qo'shish yo'li bilan hisoblaymiz va uni nolga tenglaymiz

$$\begin{pmatrix} 0,8-\lambda & 0,2 & 0 & 0,8-\lambda & 0,2 & 0 \\ 0,4 & 0,6-\lambda & 0 & 0,4 & 0,6-\lambda & 0 \\ 0,8 & 0 & 0,2-\lambda & 0,8 & 0 & 0,2-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

det = (0,8-λ)(0,6-λ)(0,2-λ) - (0,2-λ)·0,4·0,2 = 0 ,

bunda tavsifiy tenglamaning ildizlari λ_1=0,2; λ_2=1; λ_3=0,3 ga teng bo'ladi. Ko'ramizki, berilgan sharoitlarda barqarorlashgan tartib mavjud ekan.

3. TIZIMNING BARQARORLASHGAN TARTIBI UCHUN HOLATLAR EHTIMOLLIKLARI MATRITSASINI ANIQLASH.

Tizimda barqaror tartib mavjudligi aniqlangandan keyin holatlar ehtimolliklari matritsasini hisoblashga kirishiladi.

Avvalo barqaror tartib uchun P[K+1] = P[K] = P[K-1] = $P_{barqaror}$, bu yerda: K - qadamlar soni (K=0,1,2,3,4,...,n) ekanligini qayd etib o'tish lozim.

Rekurrent formulaga muvofiq

$\left\| P[K] - P_{ij}^{T} \cdot P[K-1] \right\| = 0$, yoki $\left\| E - P_{ij}^{T} \right\| \cdot \left\| P[K] \right\| = 0$, yoki

$\left\| E - P_{ij}^{T} \right\| \cdot \left\| P_{баркарор} \right\|$=0.

Ko'rilayotgan misol uchun ushbuni olamiz

$$\left[\left\| \begin{matrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{matrix} \right\| \right] \cdot \left\| \begin{matrix} P_{1\,барк} \\ P_{2\,барк} \\ P_{3\,барк} \end{matrix} \right\| = 0 \text{ yoki}$$

$$\begin{aligned} 0{,}2P_1 - 0{,}4P_2 - 0{,}8P_3 &= 0 \\ -0{,}2P_1 + 0{,}4P_2 - 0P_3 &= 0 \\ 0P_1 + 0P_2 + 0{,}8P_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bundan tashqari $R_1 + R_2 + R_3 = 1$.

Oxirgi ikki tenglamani birgalikda yechib, barqarorlashgan tartib uchun tizim holatlarining ehtimolliklari matritsasini olamiz:

$$P_{барк} = \left\| \begin{matrix} P_{1\,барк} = 0{,}6666 \\ P_{2\,барк} = 0{,}3333 \\ P_{3\,барк} = 0 \end{matrix} \right\| .$$

Markov tasodifiy jarayonlari nazariyasida barqarorlashgan tartib uchun ehtimolliklarning taqsimlanishini invariantli yoki statsionar taqsimlanish deb atalishini eslatib o'tamiz.

Ko'rib o'tilgan markov tasodifiy jarayonining asosiy bandlari, xususan, barqaror tartib uchun tizim holatlarining ehtimolliklarini aniqlash izchilligi, tekshirilayotgan texnikaviy yoki iqtisodiy jarayonni tashkil etishning turli usullarini qiyosiy taqqoslash va buning asosida ular ichidan optimal usulni tanlashga imkon yaratadi.

4. STATISTIK MODELLASH USULINI OPTIMAL YECHIMLARNI ANIQLASH UCHUN QO'LLASH.

Usulning nazariy asoslari.

Statistik modellash usulining (Monte-Karlo usuli deb ham ataladi) mohiyati tekshirilayotgan fizikaviy jarayonni ehtimoliy matematik model yordamida qayta ifodalash va bu jarayonning tavsiflarini hisoblab chiqishdan iborat. Bu usul qurilgan modelni ko'p marta sinashga va keyinchalik, ko'rilayotgan jarayonning parametrlarini statistik baholari ko'rinishidagi, sonli tavsiflarini aniqlash maqsadida, olingan ma'lumotlarga statistik ishlov berishga asoslangan. Statistik modellash usulining asosi bo'lib katta sonlar qonuni hisoblanadi.

Ehtimolliklar nazariyasida katta sonlar qonuni deganda qator teoremalar tushuniladi. Ularda u yoki bu shartlarda ko'p sonli kuzatuvlar natijalarining o'rtacha qiymatlari ehtimolligi bo'yicha qandaydir doimiy kattalikka intilishi isbotlanadi. Masalan, P.L.CHebishev teoremalaridan biri shunday ifodalangan: "Mustaqil sinovlar soni n cheksiz oshib borganda, D(x) natijaviy dispersiyaga ega bo'lgan, X tasodifiy kattalikning muntazam hatoliklar va aynan teng kuzatuv natijalaridan holi x_i o'rtacha arifmetik qiymati, ehtimollik bo'yicha bu tasodifiy kattalikning M(x) matematik kutilmasiga yaqinlashib boradi" [8, 9].

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - M[x]\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

bu yerda: ε - nihoyatda kichik musbat kattalik [10].

Bernulli teoremasi bunday ifodalanadi: "Mustaqil sinovlar soni cheksiz oshib borganda bir xil shartlarda A tasodifiy voqeaning sodir bo'lish shartli chastotasi (qaytalanuvchanligi) $R^*(A)$ ehtimollik bo'yicha uning ehtimolligi R ga intiladi", ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m_i^*}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

SHu sababli qandaydir voqeaning ehtimolligini, masalan ommaviy xizmat ko'rsatish tizimi holatining R(0), R(1), ... ,R(K) ehtimolliklarini olish uchun bitta amalga oshishdagi $P_i^* = m_i^*/n$ chastotalar hisoblanadi. So'ngra shunday hisoblarni, masalan n=1000 ta amalga oshishlar soni uchun bajariladi. Natijalarni o’rtachasi topiladi va qandaydir yaqinlashuvdagi tizim holatining qidirilgan ehtimolliklari olinadi. ¥isoblab topilgan P_0^*, P_1^*, P_2^*, ... , R_k^*, ... ,P_n^* ehtimolliklar asosida band kanallar sonining matematik kutilmasi $M^*[K]$, navbat kutish uzunligining matematik kutilmasi $M^*[S]$, navbatda bo’lish o’rtacha vaqti $t^*_{o'rta\ kutish}$ va boshqa tavsiflar hisoblanadi [11].

Namunaviy qonun bo’yicha taqsimlangan tasodifiy kattaliklarni modellash uchun algoritm.

Ikkita xizmat ko’rsatishga buyurtma orasidagi vaqt va shunga o’xshash tasodifiy kattaliklar namunaviy qonun bo’yicha taqsimlanadi.

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \text{ demak } \quad y = F(t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$$

yoki $y = 1 - e^{-\lambda t}$ va $e^{-\lambda t} = 1 - y$

Olingan ifodani logarifmlab ushbuga ega bo’lamiz

$$-\lambda \cdot t \cdot \ln e = \ln(1-y); \; t_i = -\frac{2{,}3}{\lambda} \cdot \lg(1-y_i) \qquad \text{(A)}$$

bu yerda: y_i - stoxastik mustaqil va [0,1] oraliђida bir tekis taqsimlangan tasodifiy sonlar.

SHunday qilib (A) ifoda namunaviy qonun bo’yicha taqsimlangan tasodifiy kattaliklarni modellash uchun algoritmdan iborat.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

REFERENCES:

1. Рашидов Н.Р., Закин Х.Я. Основы научного исследования. -Ташкент: Ўқитувчи, 1979. -184 с.

2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. -Москва: Наука, 1982. 286 с.

3. Махкамов К.Х. Машиналар пухталиги. Ўкув қўлланма. Тошкент, ТошДТУ, 1999. 96 б.

4. Основы научных исследований. Под. ред. Крутикова В.И. и Попова В.В. -Москва: "Высшая школа", 1989.

5. Klaus Hinkelmann, Ockar Kempthorne. Design and Analysis of Experiments. Volume 1. Introduction to Experimental Design. Wiley, 2008.

6. Klaus Hinkelmann, Ockar Kempthorne. Advanced Experimental Design. Volume 2. Introduction to Experimental Design. Wiley, 2005.

7. Авдонькин F.H. Теоретические основы технической эксплуатации автомобилей. Москва: Транспорт, 1985. -215 с.

8. Бородин В.Л., Вощинин П.А., Иванов А.З. и др. Статистические методы в инженерных исследованиях. -Москва: Высшая школа, 1983.

9. Венцель С.С. Теория вероятностей. - Москва: Наука, 1969.

10. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -Москва: 1980. -536 с.

11. Теория прогнозирования и принятия решений. Под. ред. С.А.Саркисяна - Москва: Высшая школа, 1977. – 351 с.