

Лекція 1. Функції

1.1. Поняття функції та способи її завдання.

1.2. Основні типи функцій

1.3. Основні елементарні функції

1.1. Поняття функції та способи її завдання.

Під **математичним аналізом** зазвичай розуміють галузь математики, яка розвинулася з вивченням функцій.

Коли кожному елементу x множини X ($x \in X$) ставиться у відповідність визначений елемент y множини Y ($y \in Y$), то кажуть, що на множині X задано **функцію** $y = f(x)$.

Графічна інтерпретація функціональної залежності (графік функції) зображено на рис 1.1.1

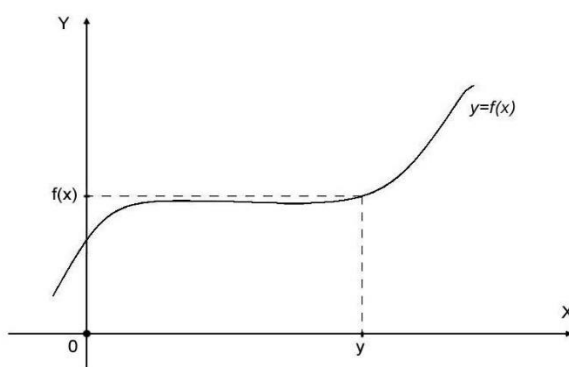


Рис. 1.1.1

При цьому називають:

- x – незалежною змінною (аргументом);
- X – множиною визначення (існування) функції, позначається $D(y)$;
- y – залежною змінною;

- Y – областю значень функції;
- f – символом функціональної залежності.

В економічних дослідженнях вивчаються функціональні зв'язки між такими змінними величинами, як ціни на товари, попит на них, пропозиція цих товарів, об'єм випущеної продукції, вкладений капітал, використані технології та трудові ресурси, дохід, прибуток тощо. Принципово важливим є також встановлення закономірностей еволюцій цих ринкових параметрів як функцій часу, що серед іншого, пов'язане з визначенням характеристик різноманітних циклів у макроекономічних та мікроекономічних сферах, задачами прогнозування.

Як приклади можуть бути названі функції: $I(t)$ - залежність фондового індексу від часу, $D(p)$ - залежність об'єму платоспроможного попиту на товар від його ціни, $S(p)$ -

Залежність об'єму ринкової пропозиції товару від його ціни, $V(p)$ -числова функція, яка виражає залежність споживчої корисності товару від його ціни(відповідно до ставлення його споживача).

Для таких функцій зазвичай визначаються їх інтервали зростання та спадання, точки екстремумів, швидкості зміни як власне функції так і «темпів» її зростання чи спадання.

Спостереження за вказаними вище ринковими характеристиками дозволяє задавати відповідні функціональні залежності таблично або графічно. Більш ґрунтовні дослідження спираються на задавання таких функцій аналітично(конкретними математичними співвідношеннями).

Функція може задаватися (тобто конкретизуватись в алгоритмі пошуку y за даним x) наступними способами:

- **таблично** (задається таблиця, в якій значенням x відповідають значення y , такий спосіб може використовуватись у випадку невеликої кількості можливих значень аргументу);

Приклад. При вивченні залежності об'ємів продаж протягом дня прохолоджувальних напоїв V торгівельною точкою (у літрах) від температури повітря t (у градусах Цельсія) отримали наступні результати:

t	18	19	22	24	28
V	150	160	280	450	600

Маємо, таким чином, таблично задану функцію $V(t)$.

- **словесно** (наприклад, функція Діріхле: $f(x)=1$, якщо x – раціональне число, $f(x)=0$, якщо x – ірраціональне);
- **графічно** (на координатній площині зображується лінія, для кожної точки якої ордината вважається значенням функції, яке відповідає значенню абсциси);

Приклад. Наведений приклад демонструє залежність рівня відтворення акустичного сигналу A в залежності від частоти ω (вимірюється у герцах) характерний для звукозаписуючого пристрою невисокого класу (рис. 1.1.2).

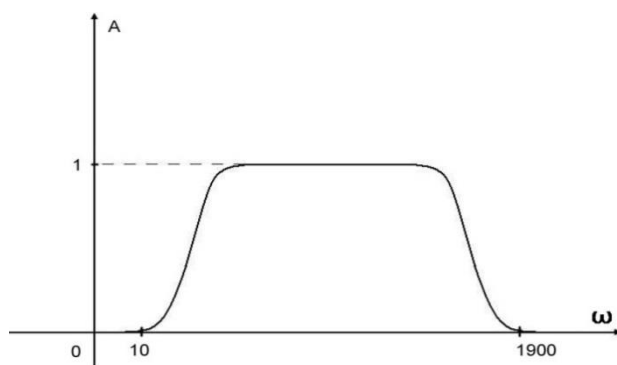


Рис. 1.1.2

- **аналітично** (якщо значення функції знаходиться з рівності або рівностей, які пов'язують x та y):

$$y = x, y = \sin x.$$

В подальшому найчастіше використовуватимемо аналітичний спосіб задавання функції. Можливі наступні його варіанти:

- явне задавання функції** співвідношенням $y = f(x)$; Такий спосіб задавання використовується при вивченні шкільної математичної програми.
- неявне задавання функції** співвідношенням $f(x, y) = 0$, $y(x, 1)$ знаходиться як корінь рівняння $f(x_1, y(x_1)) = 0$ для всіх x_1 з області визначення;

Приклад.

Розглянемо множину пар чисел (x, y) , які задовольняють рівняння

$$x^3y + y^2 + 3x^2y + 4xy = 0.$$

Її можна розглядати як спосіб задавання неявної функції $y = f(x)$. При $x = 0$ - $y = 0$, при $x = 1$ маємо $y^2 + 4y + 4 = 0$ тобто $y = -2$.

в) **параметричне спадання функції системою співвідношень:**

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, де t – параметр, y_1 вважається значенням функції, що відповідає x_1 , якщо обидва ці значення відповідають одному і тому ж значенню параметра (рис 1.1.3) t_1 : $\begin{cases} x_1 = \varphi(t_1), \\ y_1 = \psi(t_1). \end{cases}$

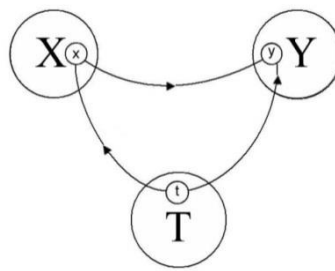


Рис 1.1.3

Приклад. Розгляньмо систему співвідношень:

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^4 + 2t^2. \end{cases}$$

Вона задає параметрично залежність y від x . Зауважимо також, що у даному випадку можна задати таку функцію явно: $y = x^2 - 1$.

Наприклад, при дослідженні одного з ринків було встановлено, що об'єм V пропозиції вершкового масла залежно від його ціни P визначається формулою:

$$V = A\sqrt{P - p},$$

де $A > 0$ - стала, p – ціна стандартизованого коров'ячого молока.

Із наявним задавання функціональної залежності ми зустрічаємось, наприклад, у випадку визначення структури ресурсів, необхідних для підтримання сталого об'єму продукції, яка випускається деяким підприємством за певний проміжок часу. Відомо, що при цьому у багатьох випадках справедливе співвідношення:

$$V = C_1 K^\alpha L^{1-\alpha} + C_2 K + C_3 L,$$

де V - вищезазначений сталий об'єм продукції,

$C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0, 0 < \alpha < 1$ - числові коефіцієнти,

$K > 0$ - об'єм використаних фінансових ресурсів,

$L > 0$ - об'єм використаних трудових ресурсів.

Зрозуміло, що таке співвідношення встановлює неявний функціональний зв'язок між величинами K та L , причому, $K = K(L)$ або $L = L(K)$.

Якщо ж у попередній ситуації не робити припущення про сталість об'єму випуску продукції, а встановити функціональні залежності $K = K(t)$ і $L = L(t)$, де t - час від початку діяльності підприємства в обраному сталому режимі, то отримуємо параметричне задавання функцій $K = K(L)$ або $L = L(K)$, параметричними співвідношеннями:

$$\begin{cases} K = K(t), \\ L = L(t), \end{cases} t \in [0, T].$$

де T – певний час спостережень.

1.2. Основні типи функцій

Розглянемо основні властивості функцій:

1. Парність та непарність.

Парною називається функція $y = f(x)$, така що для $\forall x \in D(x)$, число $(-x)$ також належить $D(x)$ і $f(x) = f(-x)$, і, відповідно, **непарною**, якщо для $\forall x \in D(x)$, $(-x) \in D(x)$, проте $f(-x) \neq f(x)$. Функція, яка не є а ні парною а

ні непарною називається **функцією загального вигляду** (або **загального положення**).

Важливо!

Слід пам'ятати, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклад. До парних функцій належать, наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$, до непарних - $y = x$, $y = \sin x$, функція $y = 2^x$ може розглядатись як приклад функції загального положення.

2. Монотонність.

Зростаючою (спадною) називається функція, для якої на проміжку X більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції. Зростаючі та спадні функції називаються **строго монотонними**. Якщо ж більшому значенню аргументу відповідає не менше (не більше), ніж попереднє, то функція називається **неспадною (незростаючою)**.

Монотонними називаються функції, які є неспадними або ж незростаючими.

Приклад. Функція $y = x^2$ (рис. 1.2.1) зростає для всіх $x \in [0, \infty)$.

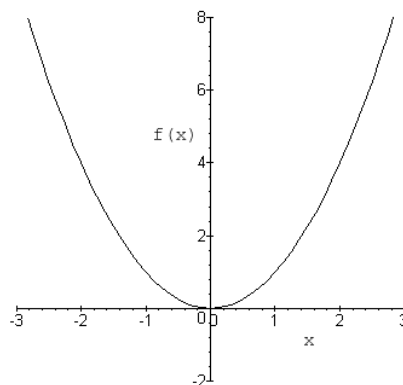


Рис. 1.2.1

Приклад . Функція $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 1.2.2) спадає для всіх x .

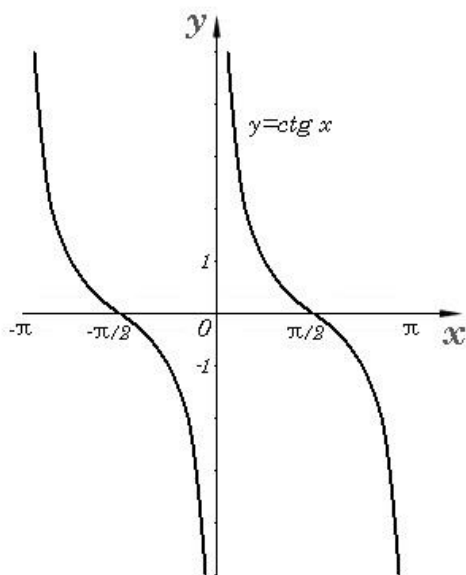


Рис. 1.2.2

Приклад . Функція $y = |x + 1| - |x|$ (рис. 1.2.3) є неспадною x .

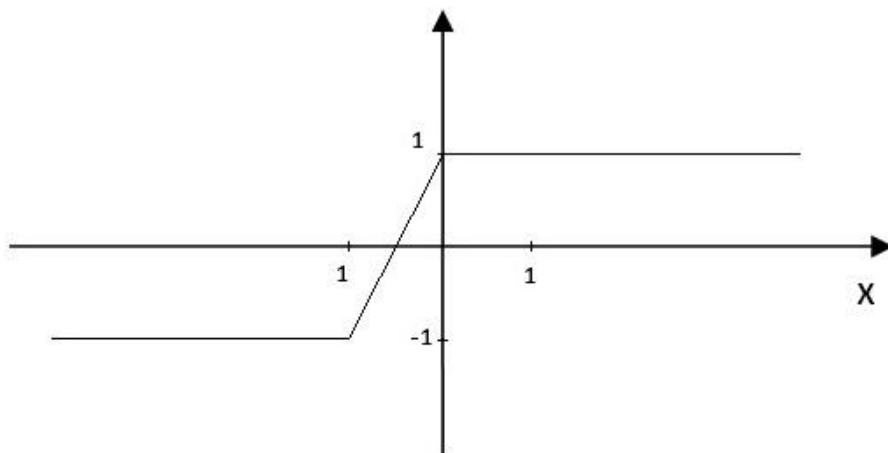


Рис. 1.2.3

3. Обмеженість.

Обмеженою на множині X називається функція, для якої існує таке число M , що $|f(x)| \leq M$ для всіх $x \in X$.

Приклад .

Функція $y = \sin x$ (рис. 1.2.4) є обмеженою для всіх x : $\sin x \in [-1; 1]$.

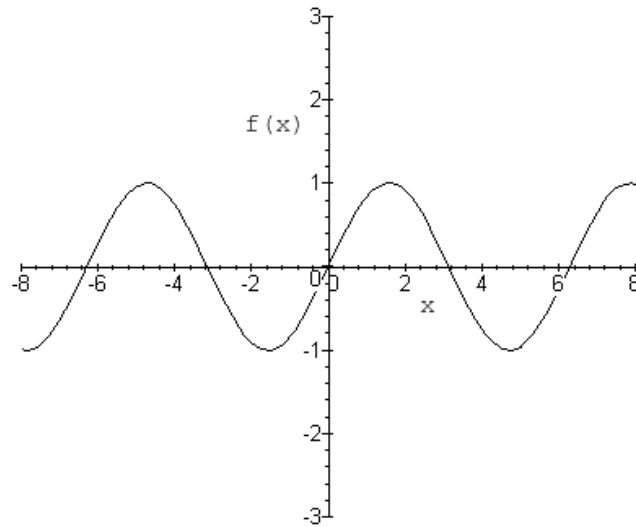


Рис. 1.2.4

4. Періодичність.

Періодичною називається функція, для якої існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(x)$ виконується рівність $f(x) = f(x + T)$, при цьому **періодом функції** називається найменше додатне число T , яке задовольняє цій умові.

Приклад .

Періодичними є, наприклад, тригонометричні функції

$$y = \sin x \ (T = 2\pi), \ y = \cos x, \ (T = 2\pi), \ y = \operatorname{tg} x, \ (T = \pi), \ y = \operatorname{ctg} x, \ (T = \pi).$$

Нетривіальним прикладом періодичної функції є **дробова частина (мантіса)**

Приклад.

$y = \{x\} = x - [x]$, де $[x]$ - ціла частина, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x . Графік такої функції представлений на рисунку 1.1.4

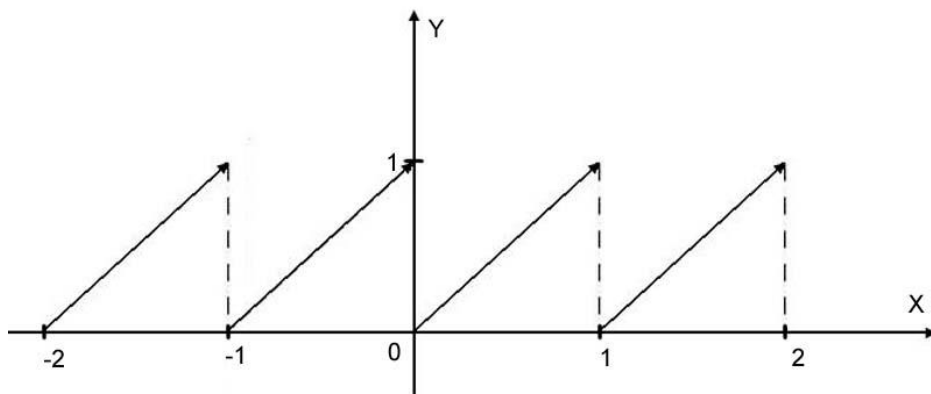


Рис 1.1.4

Разом з функцією $y = f(x)$ часто доводиться розглядати **обернену** до неї **функцію**: якщо значенню $y \in E(y)$ ставиться у відповідність **єдине** x таке, що $f(x) = y$ то отриману функцію називають оберненою до $y = f(x)$ позначають $x = f^{-1}(y)$.

Приклад.

Для функції $y = x^2, (x \in \mathbb{R}, y \geq 0)$ оберненою є функція $y = \sqrt{x}, (x \geq 0, y \geq 0)$, а для функції $y = \sin x, (x \in \mathbb{R}, y \in [0; 1])$ - функція $y = \arcsin x, (x \in [-1; 1], y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$.

Часто доводиться розглядати також **складні функції (суперпозиції функцій)**: нехай $y = f(u)$, де $u \in D(u)$, а множина $D(u)$ є областю значень функції $u = \varphi(x)$. Тоді кажуть, що визначено складну функцію $y = f(\varphi(x)) = F(x)$, або, що те ж саме, що функція F є суперпозицією функцій f та φ .

Приклад.

Складеною функцією є функція $y = \ln \sin x$ (суперпозиція логарифму та синуса), визначена для $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$.

1.3. Основні елементарні функції

В шкільному курсі математики докладно вивчаються **основні елементарні функції**:

- **степенева** $y = x^a (a \in \mathbb{R})$;
- **показникова** $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$;
- **логарифмічна** $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$;
- **тригонометричні**: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg}(x), y = \operatorname{ctg}(x)$;
- **обернені тригонометричні**: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg}(x), y = \operatorname{arcctg}(x)$.

Елементарними функціями називаються функції, отримані з основних елементарних за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операцій суперпозицій.

Елементарні функції поділяються на **алгебраїчні** та **неалгебраїчні (трансцендентні)**.

До алгебраїчних функцій відносяться:

- **многочлени** степеня n $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$;
- **дровово-раціональні функції** $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлени;

іраціональні функції, при побудові яких використовується арифметичні операції та операції добування кореня.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках:

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПП ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184.
<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf>

3). Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами / З.И. Гурова, С.Н. Каролинская, А.П. Осипова ; за ред. А.И. Кибзуна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 352 с. сторінки 18-23.

4) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>

5) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/Konspekt%20Dyferencialne%20ta%20integralne%20chyslenia.pdf>