

Лекція 2. Числова послідовність в фінансових задачах

2.1. Числова послідовність. Означення та основні властивості

2.2. Застосування послідовностей в задачах економічного змісту

2.1. Числова послідовність. Означення та основні властивості

Означення 2.1 (числової послідовності).

Числовою послідовністю називають числову функцію $a_n = f(n)$, означену на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, і позначають

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ називають *членами* числової послідовності, а a_n — n -м або *загальним членом* послідовності.

Графік послідовності **дискретний**, тобто послідовність $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ зображають точками площини Oxy з координатами $(n; a_n), n \in \mathbb{N}$ (рис. 2.1.1). Альтернативний спосіб зображення елементів послідовності - як точок на числовій прямій (рис. 2.1.2).

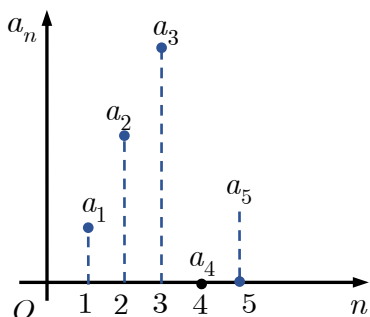


Рис. 2.1.1. Графік числової послідовності

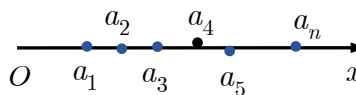


Рис. 2.1.2. Числова послідовність, як точки на числовій прямій

Послідовність можна задати:

1) формулою загального члена, наприклад, *геометрична прогресія*

$$a_n = b_0 q^{n-1}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = b_0, b_0 q, b_0 q^2, \dots, b_0 q^{n-1}, \dots;$$

2) словесним описом, наприклад, « $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність простих чисел», звідки

$$\{a_n\} = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots;$$

3) рекурсією, задаючи декілька попередніх членів, за якими можна знайти наступний. Наприклад, послідовність *чисел Фібоначчі* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Запишімо означення *монотонних* послідовностей.

Означення 2.2

(монотонних послідовностей).

Послідовність $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

- 1) *зростає* (позначають $\{a_n\} \nearrow$), якщо $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$;
- 2) *не спадає*, якщо $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$;
- 3) *спадає* (позначають $\{a_n\} \searrow$), якщо $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$;
- 4) *не зростає*, якщо $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.

Монотонність послідовності $\{x_n\}$ можна встановити, вивчаючи знак різниці

$$\Delta = x_{n+1} - x_n,$$

або, для послідовностей $\{y_n\}$ з додатними членами, порівнюючи відношення

$$q = \frac{y_{n+1}}{y_n} \geq 1.$$

Послідовність називають *обмеженою зверху (знизу)*, якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), що

$$a_n \leq M \quad (m \leq a_n) \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою*, якщо існує таке число $C > 0$, що

$$|a_n| \leq C \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Зростаюча послідовність завжди обмежена знизу першим членом, а спадна послідовність обмежена зверху першим членом.

Приклади:

- $\{n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ **монотонна (зростаюча), необмежена;**
- $\left\{ \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 1, 0, 1, 0, \dots, \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}, \dots \right\}$ - **немонотонна, обмежена;**
- $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right), \dots \right\}$ - **немонотонна, обмежена.**

В цій послідовності, коли зростає номер, то елементи послідовності наближаються до 1.

- Послідовність $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$ спадає. Дійсно, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2. Застосування послідовностей в задачах економічного змісту

Приклади послідовностей у світі фінансів

1. Простим прикладом послідовності є середній курс біткоїна по роках (див. табл.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Рік	2002	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Курс	0	0,03	0,5	10	10	600	310	360	1000	19000	3809

n	12	13	14
Рік	2019	2020	2021
Курс	12069	28000	35000

Ця послідовність є випадковою (рандомною). Вказати закон залежності курсу біткоїна від року(номера послідовності) неможливо.

2. Нехай деяка сума грошей S_n розміщена (депозитована) під прості відсотки, які складають a % річних, причому нарахування (капіталізація) відсотків здійснюється n разів на рік. У такому випадку кількості грошових коштів на депозитному рахунку після чергових капіталізацій складають послідовність:

$$a_1 = S_0 + d, a_2 = a_1 + d = S_0 + 2d, \dots, a_n = a_{n-1} + d = S_0 + nd, \dots$$

де $d = \frac{S_0 \cdot a}{100 \cdot n}$.

Така послідовність являє собою арифметичну прогресію і є зростаючою. Зауважимо, що у випадку зміни відсоткової ставки за депозитом, формула для загального члена такої послідовності стане:

$$a_n = a_{n-1} + d_n, n \geq 1.$$

3. Розглянемо тепер депозитування суми S_0 під складні відсотки, що складають b % за кожний проміжок між капіталізаціями. Це дає наступу послідовність кількостей коштів на депозитному рахунку після капіталізацій:

- після першої капіталізації

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{b}{100} \right);$$

- після другої

$$S_2 = S_1 \left(1 + \frac{b}{100} \right) = S_0 \left(1 + \frac{b}{100} \right)^2;$$

- після n – ої

$$S_n = S_{n-1} \left(1 + \frac{b}{100} \right) = S_0 \left(1 + \frac{b}{100} \right)^n.$$

Таким чином, маємо послідовність членів геометричної прогресії з початковим членом S_0 та знаменником $q = 1 + \frac{b}{100}$.

Аналогічно до попереднього зазначимо, що у разі зміни відсоткової ставки за депозитом, отримуємо співвідношення

$$S_{n+1} = S_n q_n,$$

де q_n визначається відсотковою ставкою, що діє між n -ою та $(n+1)$ -ою капіталізаціями.

Фінансові потоки

Використання різноманітних фінансових механізмів (контрактів, угод, схем оплати при здійсненні комерційних та виробничих операцій) часто пов'язане з певними чисельними та відокремленими у часі надходженнями та виплатами. У таких випадках кажуть про **фінансові потоки**, різновидом яких є фінансова рента-потік додатних надходжень грошових коштів відокремлених між собою рівними інтервалами часу. Прикладами фінансової ренти є виплата пенсій, надходження від облігацій або акцій. Зауважимо, що такого роду виплати носять уточнену назву **дискретної ренти**, оскільки у деяких випадках надходження можуть відбуватись настільки часто, що їх зручно розглядати як неперервний потік.

У зв'язку з фінансовою рентою, важливим виявляються питання, або, навпаки, дисконтування отриманих коштів. Розглянемо їх на прикладі **ануїтету** (ренти з рівними виплатами) та сталих показників нарахування та дисконтування.

Нехай потік рентних платежів здійснюється рівними сумами S у кінці кожного періоду (так звана рента постнумерандо), депозитування цієї суми протягом такого періоду дає i %. Здійснено n платежів. Тоді нарахтована сума ренти складається з суми нарахованих процентів та дорівнює

$$S_n = S \left(1 + \frac{i}{100} \right)^{n-1} + S \left(1 + \frac{i}{100} \right)^{n-2} + \dots + S$$

(у момент отримання останнього платежу).

За формулою суми членів геометричної прогресії

$$S_n = S \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{j}, \text{ де } j = \frac{i}{100}.$$

Відповідно, так звана сучасна вартість описаної вище ренти складає

$$\tilde{S}_n = S \cdot \frac{1 - (1+j)^{-n}}{j},$$

де j описує у даному випадку вже швидкість знецінення грошей протягом періоду між виплатами ренти.

Зауважимо, що відповідно до властивостей показникової функції, величина $(1 + j)^{-n}$ при необмеженому зростанні n прямує до 0, тобто сучасна вартість «вічної ренти» (наприклад, пенсії за віком або облігацій типу «британські консолі») прямує до $\frac{S}{j}$.

Модель коливання цін та об'ємів пропозицій

Розглянемо ситуацію коливання цін та об'ємів пропозицій на деякий товар. Відповідно до традиційного підходу, постачальник цього товару періодично, через деякі проміжки часу пов'язані із виробничим та (або) логістичними циклами, визначає обсяг пропозиції його на ринку. Визначальним фактором при цьому виступає ціна товару, яка склалася на ринку протягом попереднього періоду часу, тобто маємо $S(P_{k-1})$, де $S(P)$ – функція, що визначає об'єм пропозиції товару в залежності від його ціни P , P_{k-1} – ціна, яка встановилася на ринку у $(k - 1)$ -ий проміжок часу.

У той же час, відповідно до наявної кількості товару, та встановленої на нього ціни, ринок формує об'єм попиту $D(P_k)$, де $D(P)$ – функція, яка визначає об'єм попиту на товар в залежності від його ціни, P_k – ціна на товар у k -ий проміжок часу.

Зв'язок між цінами P_{k-1} та P_k встановлюється на основі рівності об'ємів пропозицій та попиту:

$$S(P_{k-1}) = D(P_k).$$

Враховуючи, що, зі зрозумілих причин, функція $D(P)$ є спадною, тобто має обернену $D^{-1}(\bullet)$ для послідовності цін

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

справедливе рекурентне співвідношення:

$$P_k = D^{-1}(S(P_{k-1})).$$

Графічно процес зміни цін може бути зображений наступним чином (Рис. 2.2.1):

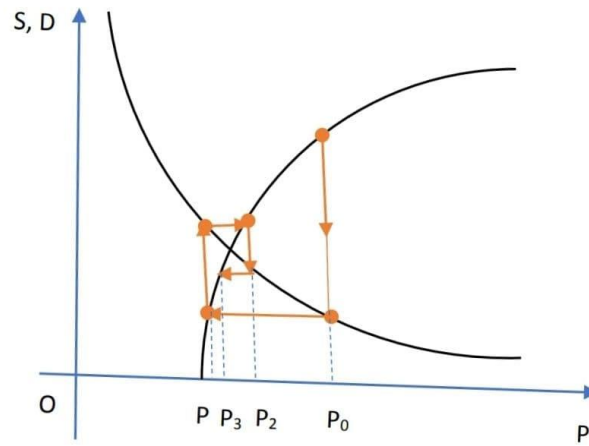


Рис. 2.2.1. Процес зміни цін

Такий закон еволюції ринкових цін отримав назву **павутинної моделі** (cobweb principle, N. Kaldor, 1934)

У найпростішому випадку, коли

$$S(P) = a_1 P + b_1 D(P) = a_2 P + b_2,$$

тобто функції пропозиції та попиту є лінійними, маємо наступне рекурентне співвідношення для послідовності цін:

$$P_k = \frac{a_1}{a_2} P_{k-1} + \frac{b_1 - b_2}{a_2},$$

звідки

$$P_1 = \frac{a_1}{a_2} P_0 + \frac{b_1 - b_2}{a_2},$$

$$P_2 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 P_0 + \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a_2} + \frac{b_1 - b_2}{a_2},$$

⋮

$$P_n = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^n P_0 + \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{n-1} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_1 - b_2}{a_2}.$$

Якщо n нескінченно зростає, а

$$\left| \frac{a_1}{a_2} \right| < 1,$$

то величина P_n дорівнює сумі двох доданків, один з яких нескінченно спадає, а другий є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії та дорівнює:

$$\tilde{P} = \frac{b_1 - b_2}{a_2} \cdot \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1},$$

так званій рівноважній ціні, якій відповідають попит та пропозиція

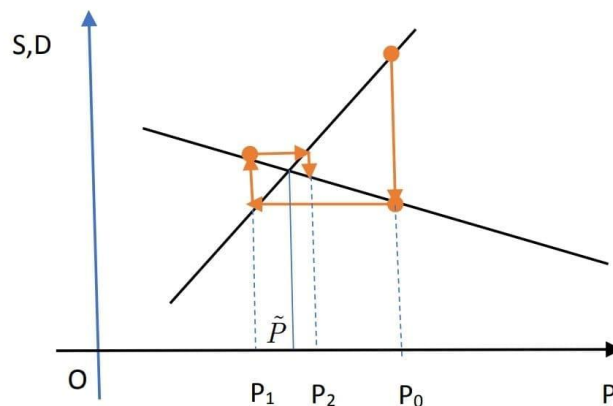


Рис. 2.2.2. Випадок лінійних функцій пропозиції та попиту

Зазначимо, що такого роду «саморегуляція ринку» має місце не завжди, а лише за певних умов, яким мають задовольняти функції пропозиції та попиту.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках:

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184.
<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf>

3). Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами / З.И. Гурова, С.Н. Каролинская, А.П. Осипова ; за ред. А.И. Кибзуна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 352 с. сторінки 18-23.

4) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>

5) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (I курс I семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/Konspekt%20Dyferencialne%20ta%20integralne%20chyslenia.pdf>