Лекція 3. Границя числової послідовності та границя функції

3.1. Означення границі числової послідовності

3.2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

3.3. «Визначеності» та невизначеності

3.4. Означення границі функції в точці

3.5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

3.6. Методи знаходження границі функції

3.7. Визначні границі

3.1. Границя числової послідовності

1. Розгляньмо числову послідовність $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Означення 3.1 (границі числової послідовності). Точку b ***називають*** *границею* послідовності $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться такий її член , після якого всі наступні члени потраплять в ε-окіл точки b, тобто виконується нерівність: $|a_n - b| < \varepsilon$.
Позначають

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \text{ або } a_n \to b, \text{ коли } n \to \infty.$$

2. Якщо послідовність, що має границю b, то її ***називають*** *збіжною* до числа b й *розбіжною* у протилежному випадку.

3. Геометричний зміст збіжності послідовності. Послідовність $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. збігається до дійсного числа b, якщо поза межами будь-якої симетричної горизонтальної смуги завширшки 2ε міститься лише скінченна кількість точок послідовності (рис. 3.1.1):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

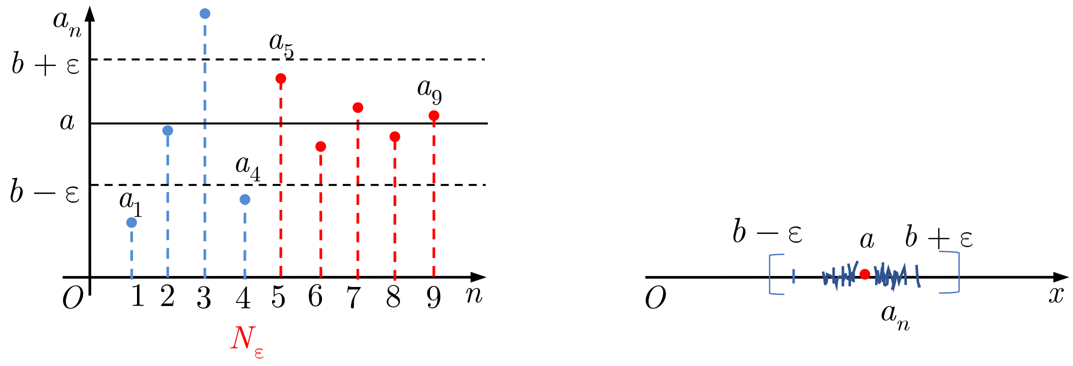

Рис.3.1.1. Геометричний зміст збіжної послідовності

Приклад.

Довести за означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$ і визначити номер N_ε, такий, що

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon = 0{,}001, \forall n > N_\varepsilon.$$

Розв'язання:

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Щоб довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$, визначаємо такий номер N_ε, що для всіх номерів $n > N_\varepsilon$ буде виконано нерівність $|a_n - b| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Якщо $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$,([ ]- ціла частина) коли $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] > 0$, або $N_\varepsilon = 1$, коли

$$\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] \le 0,$$

то для всіх n:

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Якщо $\varepsilon=\dfrac{1}{1000}$, тоді

$$N=\left[\frac{1}{\frac{1}{1000}}-1\right]=[999]=999;$$

$$\forall n>999:\left|\frac{1}{n+1}-0\right|<\frac{1}{1000}.$$

4. Послідовність є нескінченно великою, якщо виконується наступне твердження:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\Leftrightarrow\forall M>0\ \exists N_M:\forall n>N_M\Rightarrow|a_n|>M.$$

Приміром, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+7)=\infty$.

Властивості	
	1 (*єдиність границі*). Якщо для послідовності існує скінченна границя, то ця границя єдина; 2 (*обмеженість*). Якщо для послідовності існує скінченна границя, то така послідовність обмежена; 3 (*збереження знаку*). Якщо існує скінченна $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$ і $a_n\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $b\geq 0$; 4 (*збереження нерівності*). Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a_1$ та $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a_2$, $x_n\leq y_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $a_1\leq a_2$; 5 (*теорема про три послідовності*). Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, $x_n\leq z_n\leq y_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=b$.

Важливим є те, що для знаходження границі є можливість виконувати арифметичні дії над збіжними послідовностями.

Властивості	Нехай послідовності $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. та $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. збігаються, тоді 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

3.2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

1. Розгляньмо важливі випадки границі послідовності.

Означення 3.2 (нескінченно малої послідовності).	Послідовність $\{\alpha_n\}$ ***називають*** *нескінченно малою* (*н. м. п.*), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

.

Властивості **нескінчено малих послідовностей.**	1. Сума (різниця) скінченної кількості н.м.п. є н.м.п. 2. Добуток н.м.п. на обмежену послідовність є н.м.п. 3. Добуток скінченної кількості н.м.п. є н.м.п. 4. Якщо $\{\alpha_n\}$ є н.м.п., то $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ є н. в. п. і навпаки.

Властивості **нескінчено великих послідовностей.**	1. Якщо послідовність $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нескінченно велика, то послідовність $1/a_n$ є нескінченно малою. 2. Якщо послідовність $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нескінченно мала, то послідовність $1/a_n$ є нескінченно великою.

Як бачимо, нескінченно малі та нескінченно великі послідовності мають тісний зв’язок між собою.

3.3. «Визначеності» та невизначеності

1. Вище йдеться про випадки, у яких можна без будь-яких перетворень, відразу, можна знайти значення границь. Ці твердження узагальнюються, поповнюючи перелік відповідних ситуацій, «визначеностей». Приміром, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty; \quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \infty \ (a \neq 0).$$

Але можливі й «невизначені» ситуації. Приміром, добуток н. м. п. на н. в. п. може: бути н. м. п., мати відмінну від нуля границю, бути н. в. п.:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \cdot \dfrac{c}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c}{n} = 0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot \dfrac{c}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} c = c;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \cdot \dfrac{c}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} c \cdot n = +\infty;$

Приклади

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 2\cdot 0 = 0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 0.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2 + 3\dfrac{1}{n} + 2\dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} =$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} 3\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2;$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+2}{n\ \ +1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} 3\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{0+0} = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty;$$

5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+2}{n^3+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0+0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0;$$

6) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = [\infty-\infty] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0;$$

2. Збіжна послідовність є обмеженою. Але обмеженість послідовності не забезпечує її збіжності. Наприклад, обмежена послідовність $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є розбіжною. Для монотонних послідовностей їхня обмеженість забезпечує їх збіжність.

Важливим твердженням для дослідження послідовності на збіжність є наступне.

Теорема 3.1 (ознака Ваєрштраса).	Якщо монотонна послідовність $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ обмежена, то вона збігається.

Приклади

А). Приміром, послідовність $a_n = \dfrac{n+1}{n}, n\in\mathbb{N}$

мнотонно спадає :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} =$$
$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0, n \in \mathbb{N},$$

і обмежена : $1 \le a_n = \frac{n+1}{n} \le 2, n \in \mathbb{N}$. Отже, має границю: $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$.

Б). Повернемось до розгляду прикладу ренти постнумерандо з лекції 2. Переходячи до границі при $n \to \infty$ у формулі для S_n, маємо, що, оскільки $(1+j) \ge 1$, то послідовність $(1+j)^m$ є нескінченно великою, тобто, $S_n \to \infty, n \to \infty$.Таким чином, при нескінченній виплаті сума ренти теж буде нескінченною . У той же час, вираз сучасної вартості такої ренти має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S \cdot \frac{1 - \ 1 + j^{\ -n}}{j}\right) = \frac{S}{j}.$$

В). Розглянемо послідовність цін $p_n, n \ge 1$ з прикладу 5 лекції 2. У випадку лінійної залежності попиту й пропозиції від ціни товару, було отримано наступний вираз:

$$P_n = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n P_0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_1 - b_2}{a_2} =$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n P_0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a_2} \cdot \frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{a_1}{a_2} - 1}.$$

Розгляньмо наступні випадки:

- при $\left|\frac{a_1}{a_2}\right| > 1$ послідовність є нескінченно великою;
- при $a_1 = a_2$ послідовність є нескінченно великою, якщо $b_1 \ne b_2$, та стаціонарною, якщо $p_n = p_0, n \ge 1$, Якщо $b_1 = b_2$ у випадку $a_1 = -a_2$, її границя не існує.
- при $\left|\frac{a_1}{a_2}\right| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n P_0 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n - 1\right)\right) = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} = \frac{b_1 - b_2}{a_2 - a_1} \quad ;$$

Таким чином, у цьому випадку маємо збіжність послідовності цін до рівноважної ціни

$$p\left(D(p) = S(p)\right),$$

у інших же випадках ціна залишається незмінною, або нескінченно зростає, руйнуючи ринок.

3. Число *e*. Розгляньмо послідовність із загальним членом

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N} :$$

Можна показати, що послідовність $\{a_n\}$ монотонно зростає та обмежена зверху:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1};$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, n = 1,2,\ldots.$$

За ознакою Ваєрштраса це означає, що існує скінченна границя послідовності $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$, яку позначають

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.}$$

Число e трансцендентне, $e \approx 2,7182818\ldots$.

Границя, яка дорівнює числу e, є прикладом невизначеності вигляду 1^∞.

Приклад. (фінансовий зміст числа е)

Нехай депозитовано суму S_0 на умовах $p\,\%$ річних з нарахуванням складних відсотків. Припустимо, що протягом року капіталізація здійснюється n разів. Тоді, після першого нарахування відсотків сума на депозитному рахунку складе:

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{p}{100 \cdot n}\right).$$

Після другого:

$$S_2 = S_0\left(1 + \frac{p}{100 \cdot n}\right)^2.$$

Тоді, позначивши $q = \dfrac{p}{100}$, маємо

$$S_n = S_0\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n.$$

Спрямувавши $n \to \infty$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_0\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_0\left(1 + \frac{q}{n}\right)^{\frac{n}{q}q} = S_0 \cdot e^q .$$

Тобто, за великої кількості капіталізацій сума збільшиться у e^q разів.

3.4. Означення границі функції в точці

1. Розгляньмо функцію f, яка означена в деякому околі точки x_0, окрім, можливо самої точки x_0.

Означення 3.2 (границі функції мовою околів, «за Коші»).	Точку A <u>*називають*</u> *границею функції* f *у точці* x_0, якщо для будь-якого ε -околу $U_\varepsilon(A)$ точки A існує проколений δ -окіл $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, такий, що для всіх $$x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$ відповідні значення функції $$f(x) \in U_\varepsilon(A)$$ і позначають $$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Розглянемо часткові випадки сформульованого означення.

2. Припустимо, що x_0, A — дійсні числа. Число A є границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

3. Припустимо, що x_0 — дійсне число, $A = \infty$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то графік функції має в точці x_0 *вертикальну асимптоту* $x = x_0$.

4. Ще один важливий випадок скінченної границі A функції f у точці $x_0 = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$, то графік функції має *горизонтальну асимптоту* $y = A$.

Приклад.

Користуючись означенням границі функції за Коші (мовою $\varepsilon - \delta$), довести, що

$$\lim_{x \to 1}(2x + 1) = 3.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Щоб довести, що $\lim\limits_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = A \in \mathbb{R}$, знаходимо таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які справджують нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконано нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$|(2x + 1) - 3| < \varepsilon; |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то для всіх x: $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(2x + 1) - 3| < \varepsilon$.

Отже,

$$\lim_{x \to 1}(2x + 1) = 3.$$

Означення 3.3 («за Гайне» границі функції	Число A є границею функції f у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ тоді й лише тоді, коли для будь-якої послідовності аргументів $\{a_n\}, (a_n \neq x_0)$, такої, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, відповідна

у термінології послідовностей).	послідовність значень функції $\{f(a_n)\}$ збігається до числа A: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$.

Означення границі функції у точці «За Коші» і «За Гайне» виявляються еквівалентними.

Властивості функцій, що мають скінченну границю в точці

1. *Єдиність границі.* Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то ця границя єдина.
2. *Обмеженість.* Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, у якому функція f обмежена.
3. *Збереження знаку.* Якщо границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ існує та скінченна і в деякому проколеному околі точки x_0 виконано нерівність $f(x) \geq 0$, то $b \geq 0$.
4. *Збереження нерівності.* Якщо границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = b_1$ та $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = b_2$ існують та скінченні і в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $b_1 \leq b_2$.

5. *Теорема про проміжну функцію, про «двох вартових»*. Якщо існує скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = b$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ (рис. 3.4.1).

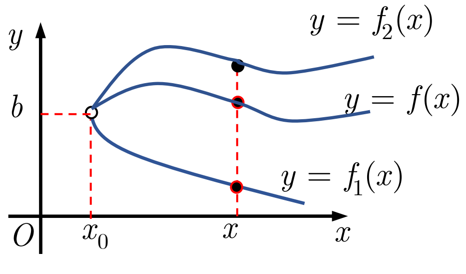

Рис. 3.4.1. Теорема про двох вартових

3.5. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

1. Розглянемо важливі випадки, що стосуються границі функції.

Означення 3.4 (нескінченно малої та нескінченно великої функції).	Функцію f <u>*називають*</u> *нескінченно малою* (*н. м. ф.*), коли $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ і *нескінченно великою* (*н. в. ф.*), якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = \infty$.

З означень границі функції в точці випливає, що функція α є н. м. ф., коли $x \to x_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| \alpha(x) \right| < \varepsilon$.

2. Властивість бути нескінченно малою чи нескінченно великою є локальною. Приміром, функція $y = \dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою, коли $x \to \infty$, і нескінченно великою, коли $x \to 0$ (рис. 3.5.1).

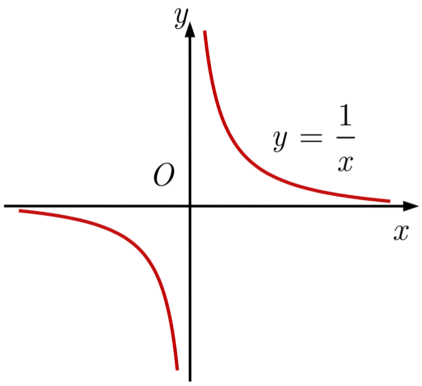

Рис. 3.5.1. Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$.

Властивості нескінченно малих функцій.

1. Сума (різниця) скінченної кількості н.м.ф., коли $x \to x_0$, є н.м.ф.

2. Добуток н.м.ф., коли $x \to x_0$, на обмежену в околі точки x_0 функцію є н.м.ф.

3. Добуток скінченної кількості н.м.ф, коли $x \to x_0$, н.м.ф.

4. Частка від ділення н.м.ф., коли $x \to x_0$, на функцію, що має відмінну від нуля границю в точці x_0, є н.м.ф.

5. Якщо $\alpha(x)$ є н.м.ф., коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією в точці x_0, і якщо $f(x)$ є нескінченно великою функцією, коли $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ є н.м.ф. в точці x_0.

3.6. Методи знаходження границі функції

Основним інструментом знаходження границі функції є

Теорема 3.2 **про арифметичні дії над границями функцій.**	Якщо існують скінченні $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ та $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$, то 1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=a\pm b$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=ab$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=a^n, n\in\mathbb{N}$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x)=Ca$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}, b\neq 0$; 5) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=a^b, a>0$.

Як і у випадку послідовностей, при знаходженні границь функції, виникають невизначеності. Можна умовно виділити 7 типів *невизначеностей*:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0\cdot\infty], [\infty-\infty], \left[0^0\right], \left[1^\infty\right], \left[\infty^0\right].$$

Розкрити невизначеність — означає знайти границю відповідного виразу, якщо вона існує.

Приклади.

А. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4}{3}$.

Розглянемо важливий приклад розкриття невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

B. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{2x^2+x+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=1.$$

C. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x=\left[\begin{array}{c}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\to\frac{1}{2},\\ x\to+\infty\end{array}\right]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]=0.$$

3.7. Визначні границі

Першою визначною границею називається границя

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

ПРИБРАТИ?Дійсно, якщо розглянути коло радіуса R з центром в точці O і здійснити зображені на рисунку побудови, то маємо (рис 3.7.1):

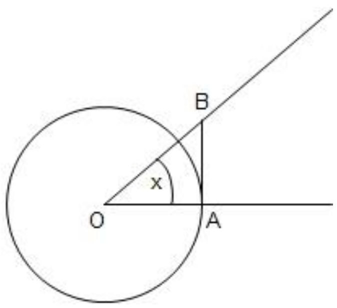

Рис 3.7.1

$$S_1=S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}R^2\sin x,\qquad S_2=S_{сектOAB}=\frac{\pi R^2}{2\pi}=\frac{x}{2}R^2,\qquad S_3=S_{OA'B}=\frac{1}{2}R^2 tgx,$$

$$S_1<S_2<S_3,$$

звідки

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}xR^2<\frac{1}{2}R^2tgx,$$

або, що те ж саме,

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\ \text{і відповідно}\ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Враховуючи шосту властивість границь і те, що $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, маємо доведення справедливості першої примітна границі.

Зазначимо, що перша визначна границя являє собою розкриття специфічної невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$. Її наслідками є границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1;$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1;$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

Другою визначною границею називається границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}\ 1+x\ ^{\frac{1}{x}}=e.$$

Її можна вивести з означення числа e та означення границі функції «за Гайне». Наслідки такої границі, що є розкриттям специфічної невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$, наступні:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a};$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$

Еквівалентними $(\alpha\sim\beta)$ далі будемо *називати* нескінченно малі величини $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to 0(\infty)}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, або ж **одного порядку малості**, якщо $\lim\limits_{x\to 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq \infty$. При цьому, якщо $\lim\limits_{x\to 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ *називається* **нескінченно малого вищого порядку малості в порівнянні з** β.

Приклад. При $x \to 0$ величина x^2 є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\sin x$. Дійсно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Зазначимо, що у випадку, коли маємо **добуток, або частку** нескінченно малих величин, то **при знаходженні границь кожна з них може бути замінена на еквівалентну.**

З першої та другої визначних границь випливають наступні еквівалентності:

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} u(x) = 0$, то:

$$\boxed{\sin u(x) \sim tg\, u(x) \sim \arcsin u(x) \sim arctg\, u(x) \sim e^{u(x)} - 1 \sim \ln(u(x)+1) \sim u(x);}$$

$$\boxed{1 - \cos u(x) \sim \frac{u(x)}{2}^2;}$$

$$\boxed{(1+u(x))^{\mu} - 1 \sim \mu u(x);} \quad \boxed{a^{u(x)} - 1 \sim u(x)\ln a;} \quad \boxed{\log_a(1+u(x)) \sim \frac{1}{\ln a} u(x).}$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf

3) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf

4) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (I курс I семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

https://docplayer.net/85539897-Diferencialne-ta-integralne-chislennya-funkciy-odniieyi-zminnoyi-konspekt-lekciy.html