Лекція 4. Порівняння нескінченно малих. Неперервність та розриви функції в економіці

4.1. Порівняння нескінченно малих функцій
4.2. Неперервність та розриви функцій
4.3. Приклади застосування неперервності в економічних моделях

4.1. Порівняння нескінченно малих функцій

Одним з ефективних інструментів розкриття невизначеностей є заміна під знаком границі однієї нескінченно малої на іншу, яка буде еквівалентною їй.

1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції (н. м. ф. та н. в. ф.) прийнято порівнювати між собою, досліджуючи їхню частку.

Нехай $\alpha(\cdot)$ та $\beta(\cdot)$ є нескінченно малими функціями, коли $x \to x_0$. Тоді, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то $\alpha(\cdot)$ *називають* н. м. ф. , більш вищого порядку малості, ніж $\beta(\cdot)$, при $x \to x_0$.

Якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A,\ A \in \mathbb{R},$$

то $\alpha(\cdot)$ та $\beta(\cdot)$ *називають* н. м. ф. однакового порядку малості, при $x \to x_0$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то $\alpha(\cdot)$ та $\beta(\cdot)$ *називають* непорівнянними н. м. ф.

Означення 4.1 (еквівалентних н. м. ф.).	Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то $\alpha(\cdot)$ та $\beta(\cdot)$ ***називаються*** *еквівалентними н. м. ф.*, при $x\to x_0$, і позначають $$\alpha(x)\sim\beta(x), x\to x_0;$$

2. Розгляньмо деякі приклади порівняння функцій:

1) н. м. ф. $\alpha(x)=x^3$ більш вищого порядку малості, ніж н. м. ф. $\beta(x)=x$, при $x\to 0$. Дійсно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0;$$

2) н. м. ф. $\alpha(x)=5x$ та $\beta(x)=x$ є н. м. ф. одного порядку малості, при $x\to 0$, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5;$$

3) н. м. ф. $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ та $\beta(x)=x$, є непорівняльним, при $x\to 0$, оскільки вираз $\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x=0$.

Означення 4.2 (еквівалентних н. м. ф.)	Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то $\alpha(\cdot)$ та $\beta(\cdot)$ ***називаються*** *еквівалентними н. м. ф.*, при $x\to x_0$, це позначають $$\alpha(x)\sim\beta(x), x\to x_0;$$

Означення 4.3 (порядку малості)	Нехай $\alpha(\cdot)$ та $\beta(\cdot)$ є н. м. ф., при $x\to x_0$. Тоді, якщо існує таке $k>0$, що $$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=A\in\mathbb{R}\ \ (A\neq 0),$$ то н. м. ф. $\alpha(\cdot)$ ***називають*** функцією k *-го порядку малості* щодо н. м. ф. $\beta(\cdot)$, при $x\to x_0$, це позначають $$\alpha(x)\sim A(\beta(x))^k, x\to x_0.$$

Функцію $A(\beta(x))^k$ *<u>називають</u>* *головною частиною* функції $\alpha(\cdot)$ відносно $\beta(\cdot)$, при $x \to x_0$.

Для нескінченно великих функцій впроваджують термін: *порядок росту*.

Приклад.

Функція $\alpha(x) = 4x^2 + 3x^5$, має:

1) порядок малості $k = 2$ відносно н. м. ф. $\beta(x) = x$, при $x \to 0$;

2) порядок росту $k = 5$ відносно н. в. ф. $\beta(x) = x$, при $x \to \infty$.

Дійсно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+3x^5}{x^2} = \lim_{x\to 0}\ 4+3x^3\ = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x^5 \sim 4x^2, x \to 0;$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x^5}{x^5} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^3}+3\right) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x^5 \sim 3x^5, x \to \infty.$$

Головною частиною функції $\alpha(x) = 4x^2 + 3x^5$ відносно функції $\beta(x) = x$, при буде функція $4x^2$

Функція $3x^5$ є головною частиною функції $\alpha(x) = 3x^2 + 2x^5$ відносно функції $\beta(x) = x$, при $x \to \infty$.

Властивості еквівалентних н. м. ф.

а). Границя частки двох н. м. ф. не зміниться, якщо кожну з них замінити на еквівалентну їй н. м. ф.

б). Різниця двох еквівалентних н. м. ф. буде н. м. ф. вищого порядку малості, ніж кожна з них.

в). Сума скінченної кількості н. м. ф. різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку малості (головній частині всієї суми).

г). Сума скінченної кількості н. в. ф. різних порядків еквівалентна головній частині всієї суми.

Заміну суми н. м. ф. або н.в.ф. її головною частиною *<u>називають</u>* *відкиданням н. м. ф. вищих порядків мализни* або *н. в. ф. нижчих порядків росту* відповідно.

Приклад.

Для функції $f(x) = ax^m + bx^n, m < n$.

$$f(x) \sim ax^m, x \to \infty;$$
$$f(x) \sim bx^n, x \to \infty.$$

Тоді,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, m = n; \\ 0,\ m > n; \\ \infty, m < n. \end{cases}$$

7. За допомогою еквівалентностей можна одержати **формулу розкриття** однієї зі степенево-показникових невизначеностей:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}.}$$

Обчислюючи границі, у добутку та частці під знаком границі можна замінювати н. м. ф. на еквівалентну їй н. м. ф.

У сумі (різниці) еквівалентних н. м. ф. під знаком границі **не можна** змінювати н. м. ф на еквівалентні. У цьому разі перетворюють суму (різницю) на добуток (частку) або використовують асимптотичні рівності.

Приклад.

а). Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 3x \cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x \cdot (1-\cos 2x)}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin^2 3x \cdot \operatorname{tg}\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} x \cdot (1-\cos 2x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} \arcsin 3x \sim 3x, 3x \to 0 \\ \operatorname{tg}\sqrt{x} \sim \sqrt{x}, \sqrt{x} \to 0, \\ \operatorname{arctg} x \sim x, \\ 1-\cos 2x \sim \dfrac{(2x)^2}{2} = 2x^2, 2x \to 0 \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3x)^2 \cdot \sqrt{x}}{x \cdot 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{9}{2\sqrt{x}} = +\infty.$$

б). Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+1}\right)^{3x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{3x}=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{2x}}=1\right]=\left[1^{\infty}\right]=$$
$$=\left[\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}\right]=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}-1\right)3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{3}{2}}.$$

4.2. Неперервність функцій

Неперервні функції є базовими функціями, на підставі яких будують моделі у економічних задачах. Неперервну функцію можна уявляти, як функцію, графік якої можна намалювати не відриваючи ручки від листа паперу, але це є лише початковим уявленням, і таке уявлення потребує формалізації.

1. Нехай f означено в деякому околі точки x_0.

Означення 4.4 **(функції, неперервної в точці)**	Функцію f ***називають*** *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції f, при $x\to x_0$, і ця границя дорівнює значенню функції в точці: $$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Отже, функція f є неперервною в точці x_0, якщо вона задовольняє такім властивостям:

1) f означена в деякому околі точки x_0;

2) існує $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. Тоді рівність 3) можна переписати так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Ця рівність дозволяє переходити до границі під знаком функції у випадку неперервної функції. Це означає, що «границя для неперервної функції дорівнює функції від границі».

Приклад.

Функція $f(x) = \ln x$ неперервна на інтервалі $(0,+\infty)$, а функція $g(x) = \sqrt{x}$ на інтервалі $[0,+\infty)$.

Відзначимо, що в якості еквівалентних означень неперервної функції можна розглядати наступні:

1) неперервність функції означає неперервність її графіка, тобто можливість зобразити його не відриваючи олівця від паперу;

2) функція неперервна тоді і тільки тоді, коли її приріст $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ ***прямує до нуля при*** $\Delta x \to 0$

Властивості функцій, які є неперервними в точці.

Властивості функцій, неперервних у точці, випливають з означення неперервності і відповідних властивостей границі функції в точці.

1. Функція, яка є неперервною в точці, обмежена в деякому околі цієї точки.

2. Нехай f неперервна в точці x_0, тоді існує окіл точки x_0, у якому функція f має знак $f(x_0)$.

3. Нехай f_1 та f_2 є неперервними функціями в точці x_0, для яких виконується нерівність, тоді існує деякий окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.

4. Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\dfrac{f}{g}$ (у разі, якщо $g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних у точці, випливають з означення неперервності і відповідних властивостей границі функції в точці.

Означення 4.5 (однобічні границі)	Границю зліва в точці x_0 позначають як $$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x).$$ Границю справа в точці x_0 позначають як $$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x).$$ Границю зліва (справа) *називають* *однобічною границею*

Якщо функція не є неперервною в точці x_0, то точка x_0 *називається* **точкою розриву функції**. Розрізняють наступні типи точок розриву:

1) **Усувний розрив,** це, коли існує границя $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, проте її значення не співпадає зі значенням $f(x_0)$ або ж останнє не існує;

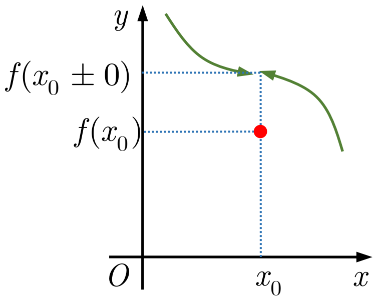

Рис. 4.2.1. Усувна точка розриву

Приклад.

Функція $y=\dfrac{\sin x}{x}$ має усувний розрив в точці $x=0$, оскільки її значення при $x=0$ не визначене, проте існує границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2) **Розрив першого роду** (розрив типу «стрибок»), це, коли границі
$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$$
та
$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$
існують, проте не рівні між собою;

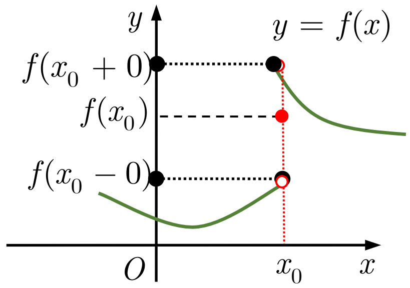

Рис. 4.2.2. Точка розриву першого роду стрибок

Приклад.

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ є точкою розриву.

Знайдемо однобічні границі в точці $x_0 = 0$:

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to+0} 1 = 1;$$

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to+0} (-1) = -1.$$

Оскільки в точці $x_0 = 0$ існують скінченні, не рівні між собою, однобічні границі, то це точка розриву 1-го роду, неусувного (рис. 4.2.3), із стрибком

$$f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2.$$

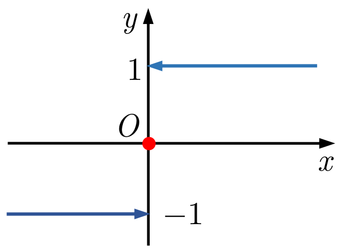

Рис. 4.2.3. Графік функції $y = \operatorname{sgn} x$

3) **Розрив другого роду**, це, коли хоча б одна з границь

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$$

та

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$$

нескінченна або не існує.

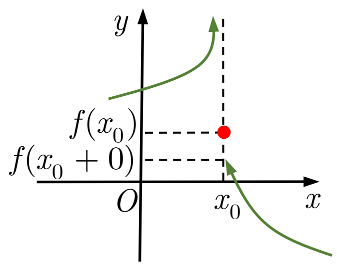

Рис. 4.2.4. Точка розриву 2-го роду (нескінченного)

Приклад.

Функція $f(x)=tg\ x$ має в точці $x=\dfrac{\pi}{2}$ розрив другого роду, оскільки

$$f(\pi/2-0)=\lim_{x\to\pi/2-0} f(x)=-\infty,$$

та

$$f(\pi/2+0)=\lim_{x\to\pi/2+0} f(x)=+\infty\ .$$

Функції, неперервні на замкненому проміжку $[a;b]$, мають наступні властивості:

1) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому проміжку.
2) Якщо функція неперервна на проміжку $[a;b]$, то існують точки $x_1\in[a;b], x_2\in[a;b]$ в яких функція досягає своїх найменшого m та найбільшого M значень на цьому проміжку:
$$f(x_1)=m,\ f(x_2)=M.$$
3) Якщо функція неперервна на проміжку $[a;b]$ і її значення на кінцях цього відрізку мають різні знаки, то відрізку знайдеться точка x_0 така, що
$$f(x_0)=0.$$

оскільки в цих точках вона не визначена.

4.3. Приклади застосування неперервності в економічних моделях

У економічно математичних моделях використовуються переважно неперервні функції. Розглянемо, наприклад, залежність податкових виплат T від річного доходу I платника податків.

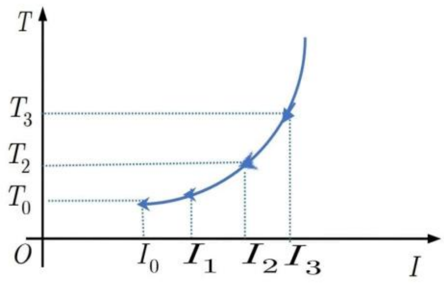

Рис. 4.3.1. Залежність податкових виплат від річного доходу. ЦЕ КУСКОВО-ЛІНІЙНИЙ ГРАФІК

Маємо неперервну кусково-лінійну функцію. При цьому залежність відсоткової ставки податку T від доходу є розривною ступінчастою функцією.

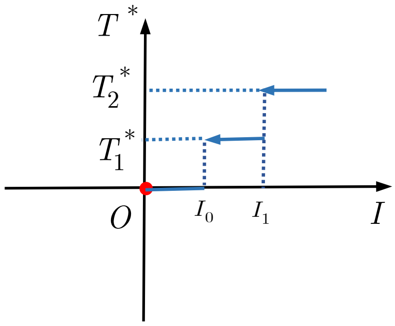

Рис. 4.3.2. Графік податкових виплат.

Тут податкові виплати є нульовими, якщо дохід не перевищує I_0, складають $T_1^*\%$, якщо дохід знаходиться в межах I_0 до I_1, $T_2^*\%$, якщо дохід знаходиться в межах I_1 до I_2 і т.д.

<u>*Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках*</u>

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ :

Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184. *https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf*

3) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf

4) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

http://matan.kpi.ua/public/files/Konspekt%20Dyferencialne%20ta%20integralne%20chyslenia.pdf