

## Лекція 5. Диференціальне числення функцій однієї змінної

5.1. Задачі, що призводять до поняття похідної

5.2. Похідна та диференціал функції. Зміст та застосування диференціала

5.3. Правила знаходження похідних та диференціалів, таблиця похідних

5.4. Похідні та диференціали вищих порядків

5.5. Основні властивості диференційованих на інтервалі функцій

5.6. Похідна в задачах економічного характеру

### 5.1. Задачі, що призводять до поняття похідної

Поняття похідної є одним з основних у математиці. Похідна широко використовується при вирішенні цілого ряду завдань математики, фізики, економіки, фінансів, інших наук, особливо при вивченні швидкості зміни різних процесів, еластичності.

Поняття похідної функції є одним з найважливіших в математичному аналізі. Сукупність понять, тверджень, методів, пов'язаних з цим поняттям називається **диференціальним численням**.

#### **А) Швидкість прямолінійного руху**

Нехай матеріальна точка (деякий тіло)  $M$  рухається нерівномірно по деякій прямій. Кожному значенню часу  $t$  відповідає певна відстань  $OM = S$ , до деякої фіксованої точки  $O$ . Це відстань залежить від пройденого часу  $t$ , тобто

$$S = S(t).$$

Це рівність називають *законом руху* точки. Потрібно знайти швидкість руху точки.

Якщо в деякий момент часу  $t$  точка займає положення  $M_0$ , то в момент часу  $t + \Delta t$  ( $\Delta t$  - приріст часу) точка переміститься в положення  $M_1$ , де  $OM_1 = S + \Delta S$  ( $\Delta S$  - приріст відстані) (див. рис. 5.1.1).

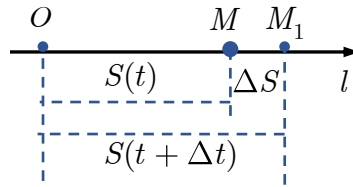


Рис. 6.1.1. Закон руху точки

Тоді **середня швидкість руху** дорівнює відношенню пройденого шляху до часу  $\Delta t$  :

$$V_c = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t},$$

Середня швидкість залежить від значення  $\Delta t$  : чим менше  $\Delta t$  , тим точніше середня швидкість виражає швидкість руху точки в даний момент часу  $t$  .

Границя середньої швидкості руху при  $\Delta t \rightarrow 0$  до нуля проміжку часу називається швидкістю руху точки в фіксований момент часу (або миттєвою швидкістю). Позначивши цю швидкість через  $V$  , отримаємо

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

### Б) Задача про дотичну

Нехай (див. рис. 6.1.1) задано неперервну криву, що відображає функціональну залежність  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0, y_0)$  .

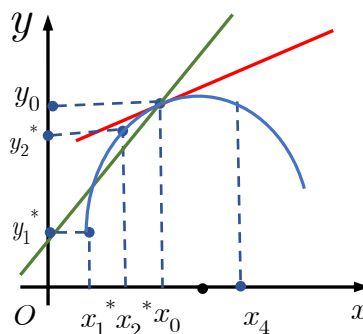


Рис. 6.1.2. Неперервна крива та дотична

Під дотичною до кривої ми розумітимемо граничне положення прямої, що сполучає цю точку з точкою  $M_1(x^*, y^*)$  цієї ж кривої, якщо точка  $M_1$  прямує по кривій до точки  $M_0$ .

При цьому рівняння прямої проведеної через точки  $M_0$  та  $M_1$  має вигляд:  
 $\frac{x - x_0}{x^* - x_0} = \frac{y - y_0}{y^* - y_0}$ , або, що те ж саме,  $y - y_0 = \frac{y^* - y_0}{x^* - x_0}(x - x_0)$ , відповідно, переходячи до границі  $x^* \rightarrow x_0$ , маємо  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , де  $k$  – кутовий коефіцієнт дотичної – знаходиться за формулою  $k = \lim_{x^* \rightarrow x_0} \frac{y(x^*) - y(x_0)}{x^* - x_0}$ , тобто є границею відношення різниці значень функції до різниці відповідних значень аргументу, якщо остання прямує до нуля (ця границя може бути нескінченною або ж не існувати).

### В) Задача про продуктивність праці.

Нехай  $u = u(t)$  є кількість продукції, виробленої за час  $t$ , і постає питання про продуктивність праці в момент часу  $t_0$ . Тоді, аналогічно до попереднього, можна запровадити **середню продуктивність праці** за час від  $t = t_0$  до  $t = t_0 + \Delta t$

$$P_{\text{сер}} = \frac{u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)}{\Delta t},$$

та миттєву продуктивність.

## 5.2. Похідна та диференціал функції. Зміст та застосування диференціал

Нехай функція  $f(x)$  визначена на проміжку  $X$ , точки  $x_0$  та  $x_0 + \Delta x$ .

### Означення 5.1 (похідної функції в точці)

Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Диференційованою в точці**  $x_0$  називається функція, яка в точці  $x_0$  має скінченну похідну.

Функція  $y = f(x)$ , що має похідну в кожній точці інтервалу  $(a; b)$ , називається диференційованою в цьому інтервалі; операція знаходження похідної функції називається диференціюванням.

Значення похідної функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  позначається одним із символів:

$$y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Згадуючи властивості границь, зазначимо, що:

- 1) *скінченна похідна може існувати тільки тоді, коли  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  прямує до 0 при  $\Delta x \rightarrow 0$ , тобто тільки коли функція  $f(x)$  неперервна (інакше кажучи, диференційованою може бути тільки неперервна функція, проте не всі неперервні функції диференційовані);*
- 2) *існування скінченної похідної  $f'(x_0) = A$  означає, що*

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha,$$

*де  $\alpha$  - нескінченно мала величина, звідси маємо*

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Вираз  $A \cdot \Delta x$ , який є головною, лінійною відносно приросту аргументу частиною приросту функції називається диференціалом функції.

Диференціал функції  $y = f(x)$  позначається  $dy$  або  $df$ , і, враховуючи, що  $A = f'(x_0)$ , обчислюється за формулою  $dy = f'(x_0)\Delta x$ . Оскільки диференціал функції  $y = x$  співпадає з  $\Delta x$ , то замість  $\Delta x$  можна писати  $dx$ .

Основне практичне застосування диференціалу – для наближення обчислень:

$$y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx dy,$$

звідки

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x.$$

### Приклад.

Обчислимо наближено  $\sqrt[3]{7,97}$ . Для цього розглянемо функцію  $y(x) = \sqrt[3]{x}$ , виберемо  $x_0 = 8, \Delta x = -0,03$ . Зауваживши, що  $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , причому

$$y(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2, \quad y'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}, \text{ маємо}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7,97} &= y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = \\ &= 2 + \frac{1}{12}(-0,03) = 2 - \frac{0,01}{4} = 1,9975. \end{aligned}$$

## 5.3. Правила знаходження похідних та диференціалів, таблиця похідних

З властивостей границь впливають наступні **правила диференціювання** (знаходження похідних і, відповідно, диференціалів):

- 1) Похідна сталої величини  $C$  дорівнює нулю, тобто  $C' = 0, d(C) = 0$ .
- 2) Похідна  $y = x$  дорівнює 1, тобто  $(x)' = 1, dy = dx$ .
- 3) Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних:

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

- 4) Сталий множник можна (і треба!) виносити за знак похідної (і диференціала):

$$(c \cdot u)' = c \cdot u',$$

$$d(c \cdot u) = c \cdot du.$$

- 5) Похідна добутку диференційованих функцій знаходиться за формулою:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv',$$

$$d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

- 6) Похідна частки диференційованих функцій знаходиться за формулою:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

7) Похідна складної функції  $y = f(\varphi(x))$  знаходиться за формулою:

$$y' = f'_u|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x),$$

$$dy = f'_u|_{u=\varphi(x)} \cdot d\varphi.$$

При цьому ми вважаємо, що  $f(u)$  та  $u = \varphi(x)$  – диференційовані функції своїх аргументів.

З останньої властивості випливає **правило логарифмічного диференціювання:**

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Дійсно,  $(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ , що і доводить формулу. Таке правило використовується для диференціювання **показниково-степеневих функцій**  $y = [f(x)]^{g(x)}$  та функцій, що є добутком більш, ніж двох функціональних співмножників.

8) **Похідна функції  $x = x(y)$ , оберненої до функції  $y = y(x)$**  задовольняє

$$\text{рівність } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Для похідних та диференціалів основних функцій маємо наступну таблицю (далі основна функція  $f(x)$ , складна  $f(u(x))$ ):

№	Основна функція	Похідна основної функції	Диференціал основної функції	Похідна складної функції
1	$C$	0	0	0
2	$x$	1	$dx$	$u'$
3	$x^a$	$ax^{a-1}$	$ax^{a-1}dx$	$au^{a-1} \cdot u'$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

5	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^2}dx$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$
6	$e^x$	$e^x$	$e^x dx$	$e^u u'$
7	$a^x$	$a^x \ln a$	$a^x \ln a dx$	$a^u \ln a \cdot u'$
8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x} dx$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{1}{x \ln a} dx$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
10	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$	$\cos u \cdot u'$
11	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$	$-\sin u \cdot u'$
12	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
18	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x dx$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$
19	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x dx$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$
20	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
21	$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

### Приклад.

1). Нехай  $y = 2 + 3x^2 - \sqrt{x} + e^x$ . Тоді

$$\begin{aligned}
 y' &= (2 + 3x^2 - \sqrt{x} + e^x)' = (2)' + 3(x^2)' - (x^{\frac{1}{2}})' + (e^x)' = \\
 &= 0 + 3 \cdot 2x - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + e^x = 6x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^x.
 \end{aligned}$$

2). Знайдемо похідну функції  $y = \sin x \cdot \log_2 x$ . Використовуючи правило диференціювання добутку, отримуємо

$$y' = (\sin x)' \cdot \log_2 x + \sin x \cdot (\log_2 x)' = \cos x \cdot \log_2 x + \frac{\sin x}{x \ln 2}.$$

3). Обчислимо похідну функції  $f(x) = \frac{\arctg x}{x}$ . Ця функція являє собою частку функцій  $y = \arctg x$  та  $y = x$ , тому відповідно до правила диференціювання частки, маємо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\arctg x)' \cdot x - \arctg x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{1+x^2} - \arctg x \cdot 1}{x^2} = \\ &= \frac{x - (1+x^2) \cdot \arctg x}{x^2(1+x^2)}. \end{aligned}$$

4). Знайдемо похідну  $y = \ln(\sin x)$ . Оскільки маємо складну функцію – суперпозицію функцій  $y = \sin x$  (внутрішня) та  $y = \ln u$  (зовнішня), то

$$y' = (\ln u)' \Big|_{u=\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

5). Нехай  $f(x) = x^x$ . Це показниково-степенева функція. Тому

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^x (\ln x^x)' = x^x (x \cdot \ln x)' = x^x (x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)') = \\ &= x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x (\ln x + 1). \end{aligned}$$

6). Розгляньмо функцію  $f(x) = x \cdot e^x \cdot \operatorname{sh} x$ . Вона являє собою добуток трьох співмножників. Тому є сенс використати логарифмічне диференціювання:

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln x + \ln e^x + \ln \operatorname{sh} x = \\ &= \ln x + x + \ln \operatorname{sh} x. \\ (\ln f(x))' &= (\ln x)' + (x)' + (\ln \operatorname{sh} x)' = \\ &= \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{x} + \operatorname{cth} x. \end{aligned}$$

Отже,

$$(f(x))' = x^x \cdot e^x \cdot \operatorname{sh} x \left(1 + \frac{1}{x} + \operatorname{cth} x\right).$$

Наступні правила диференціювання пов'язані зі специфічними способами задавання функції:

- 1) Якщо **функцію задано неявно** співвідношенням  $F(x, y(x)) = 0$ , то для знаходження похідної на  $x$ , **треба продиференціювати тотожність**  $F(x, y(x)) = 0$ , де ліва частина – складна функція, а права – стала, а потім **розв'язати отримане рівняння відносно**  $y'(x)$ :  $y' = \varphi(x, y)$ .

**Приклад.**

Нехай функцію  $y(x)$  неявно задано співвідношенням  $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ . Тоді. Застосовуючи правило диференціювання неявно заданої функції, отримуємо

$$\begin{aligned} (x^2)' + (y^2)' - 3(xy)' &= 2x + 2y \cdot y' - 3(x' \cdot y + x \cdot y') = \\ &= 2(x^2 + y^2 \cdot y' - x' \cdot y - x \cdot y') = 0. \end{aligned}$$

Таким чином,  $(y^2 - x)y' + x^2 - y = 0$ . Тоді остаточно маємо

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

- 2) Якщо **функцію задано параметрично** системою рівностей

$$y(x) : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

де  $t$  – параметр, то її **похідна** теж **задається параметрично** системою нерівностей

$$y'(x) : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

**Приклад.**

Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , задану параметрично системою співвідношень:

$$y(x) : \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Тоді для її похідної  $y' = \frac{dy}{dx}$  маємо вираз, що задається системою співвідношень:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y' = \frac{(\sin^3 t)'}{(\cos^3 t)'} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t. \end{cases}$$

#### 5.4. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція  $y = f(x)$  має похідну  $y' = \varphi(x)$ , при чому  $\varphi(x)$  – диференційована. Тоді її похідну  $\varphi'(x)$  називають **другою похідною** функції  $y = f(x)$  і позначають  $y''$ ,  $f''$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ . Похідну другої похідною називають **третьою похідною** і позначають  $y'''$ ,  $f'''$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ ,  $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}))$ . Взагалі, **похідна  $n$  – порядку є похідною похідної  $(n-1)$  порядку**:  $y^{(n)}$ ,  $f^{(n)}$ ,  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}})$ . Порядок похідної може також позначатись римськими цифрами, наприклад  $y^v$  – п'ята похідна.

#### Фізичний зміст другої похідної.

Якщо  $S = S(t)$  – шлях, пройдений за час  $t$ ,  $S'(t)$  – швидкість момент часу  $t$ ,  $S''(t)$  – **прискорення в момент часу  $t$** .

#### Приклад.

Розгляньмо похідні вищих порядків функції  $y = \sin x$ . Оскільки  $y' = \cos x$ , то  $y'' = (\cos x)' = -\sin x$ ,  $y''' = (-\sin x)' = -\cos x$ ,  $y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x$  і т.д.

Можна зауважити, що для похідної  $n$ -го порядку справедлива формула:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Якщо функцію задано параметрично співвідношеннями

$$y(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

то її перша похідна

$$y'(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

а

$$y''(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''_t \varphi'_t - \psi'_t \varphi''_t}{(\varphi'_t)^3}. \end{cases}$$

Взагалі, якщо

$$y^{(n-1)}(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi_{n-1}(t), \end{cases}$$

то

$$y^{(n)}(x): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(\psi_{n-1})'_t}{\varphi'_t}. \end{cases}$$

### Приклад.

Повернемось до розгляду функції  $y = f(x)$ , заданої параметрично системою співвідношень:

$$y(x): \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

Було показано, що її похідна  $y'$  у цьому випадку задається системою

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = -t \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Тоді  $\frac{d^2y}{dx^2}$  задається системою

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y'' = \frac{(-t \operatorname{tg} t)'}{(\cos^3 t)'} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3 \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3 \cos^4 t \sin t}. \end{cases}$$

Якщо ж функцію задано неявно співвідношенням  $F(x, y) = 0$ , то, наприклад, її **другу похідну знаходять диференціюванням рівності для першої похідної:**

$$y' = \varphi(x, y) \Rightarrow y'' = (\varphi(x, y(x)))'_x = \varphi_1(x, y(x), y'(x)) = \varphi_1(x, y(x), \varphi(x, y)) = \varphi_2(x, y)$$

### Приклад.

Раніше було показано, що похідна функції  $y(x)$ , неявно заданої співвідношенням  $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ , визначається як  $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$ .

Відповідно, друга похідна функції визначається як

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(y - x^2)'(y^2 - x) - (y^2 - x)'(y - x^2)}{(y^2 - x)^2} = \\ &= \frac{(y' - 2x)(y^2 - x) - (2yy' - 1)(y - x^2)}{(y^2 - x)^2} = \\ &= \frac{y'(2x^2y - x - y^2) + x^2 + y - 2xy^2}{(y^2 - x)^2} = \\ &= \frac{\frac{y - x^2}{y^2 - x}(2x^2y - x - y^2) + x^2 + y - 2xy^2}{(y^2 - x)^2} = \\ &= \frac{3x^2y^2 - 2xy^3 + 2x^2y - xy + y^3 - y^2 - x - x^3}{(y^2 - x)^3}. \end{aligned}$$

Повертаючись до знаходження похідних вищих порядків для явно заданих функцій, наведемо наступну корисну формулу, що є узагальненням формули  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ . **Це – формула Лейбніца:**

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} v' + \dots + C_n^{n-1} \cdot u' v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

### Приклад.

Знайдемо, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, похідну десятого порядку функції  $y = (x^2 + 1)e^x$ . Покладемо  $u(x) = (x^2 + 1)$ , а  $v(x) = e^x$ , тоді

$$u' = 2x, u'' = 2, u''' = 0, u^{(4)} = 0, \dots, v' = e^x, v'' = e^x, \dots$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= uv^{(10)} + C_{10}^1 u' v^{(9)} + C_{10}^2 u'' v^{(8)} + C_{10}^3 u''' v^{(7)} + \dots = \\ &= (x^2 + 1)e^x + \frac{10!}{1!9!} \cdot 2x \cdot e^x + \frac{10!}{2!8!} \cdot 2 \cdot e^x + \frac{10!}{3!7!} \cdot 0 \cdot e^x + \dots = \\ &= (x^2 + 1)e^x + 20 \cdot x \cdot e^x + 90 \cdot e^x + 0 + \dots = (x^2 + 20x + 91) \cdot e^x. \end{aligned}$$

**Диференціалом  $n$ -порядку** називається диференціал  $(n-1)$  порядку:  
 $d^n y = d(d^{n-1} y)$ .

Таким чином:

$$d^2 y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y')' \cdot dx \cdot dx = y'' dx^2, \dots, d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n.$$

## 5.5. Основні властивості диференційованих на інтервалі функцій та їх застосування

Нехай функція  $y = f(x)$  є диференційовною на проміжку  $[a; b]$ . Тоді для неї справджуються наступні твердження:

Якщо  $x_0 \in (a; b)$ ,  $f'(x_0) \neq 0$ , то існує окіл цієї точки, в якому:

- Якщо  $f'(x_0) > 0$ , то приріст функції та приріст аргументу мають однакові знаки (функція зростає);
- Якщо  $f'(x_0) < 0$ , то приріст функції та приріст аргументу мають протилежні знаки (функція спадає);
- $d^2 y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y')' \cdot dx \cdot dx = y'' dx^2, \dots, d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n.$

Існують точки для яких  $f(x) > f(x_0)$  та точки для яких  $f(x) < f(x_0)$ .

**Теорема 5.1**  
**(теорема Ролля)**

Якщо функція  $y = f(x)$  задовольняє умові  $f(a) = f(b)$ , то всередині сегмента  $[a;b]$  знайдеться принаймні одна така точка  $x_1$ , що  $f'(x_1) = 0$

**Теорема 5.2**  
**(теорема Лагранжа)**

Для функції  $y = f(x)$  існує всередині сегмента  $[a;b]$  знайдеться принаймні одна така точка  $x_2$ , що

$$f'(x_2) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Наслідком теореми Лагранжа є формула Лагранжа або формула скінченних приростів:  $f(b) - f(a) = f'(x_2)(b - a)$ , яка може використовуватись, наприклад, для наближених обчислень (слід пам'ятати, що теорема Лагранжа стверджує лише існування значення аргументу, проте не дає способу його знаходження, тому на практиці частіше за все вибирають  $x_2 = \frac{a+b}{2}$ , отримуючи при цьому замість точної рівності наближену).

**Теорема 5.3**  
**(теорема Коші)**

Якщо функції  $f(x)$  та  $g(x)$  обидві неперервні та диференційовні на проміжку  $[a;b]$ , при чому  $g'(x)$  не дорівнює нулю на інтервалі  $(a;b)$ , то на цьому інтервалі знайдеться точка  $x^*$  така, що

Для функції  $y = f(x)$  існує всередині сегмента  $[a;b]$  знайдеться принаймні одна така точка  $x_2$ , що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

Надзвичайно важливим наслідком теореми Коші є **правило Лопіталя-Бернуллі** розкриття невизначеностей (коротше – **правило Лопіталя**):

1) Якщо функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні та диференційовні в околі точки  $x_0$  (при достатньо великих  $x$ ), і прямують до нуля при  $x$ , що прямує до  $x_0$  (до нескінченності), то  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , якщо остання границя існує;

2) Якщо функції  $f(x)$  та  $g(x)$  неперервні та диференційовні в околі точки  $x_0$  (при достатньо великих  $x$ ), і нескінченно зростають при  $x$ , що прямує до  $x_0$  (до нескінченності), то  $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ , якщо остання границя існує.

**Відзначимо, що :**

1) *правило Лопіталя-Бернуллі є способом розкриття невизначеностей типу  $\frac{0}{0}$  та  $\frac{\infty}{\infty}$ ;*

2) *на практиці найкращі результати досягаються при комбінуванні цього правила та методу заміни еквівалентними нескінченно малими;*

3) *часто доводиться використовувати це правило багатократно*

$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ , *якщо виконуються відповідні вимоги*

### **Приклад.**

1) Скористаймося правилом Лопіталя для знаходження границі

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(e^{x-1} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{e^{x-1}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

2). Знайдемо за допомогою правила Лопіталя границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

3). Обчислимо границю за допомогою правила Лопіталя.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{shx} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \sqrt{x})'}{(shx)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{chx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}chx} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Оскільки, за першою примітною границею  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$ . Зауважмо, що закінчити знаходження границі можна було і з застосуванням правила Лопітала.

## 5.6. Похідна в задачах економічного характеру

У економічно математичних моделях використовуються переважно неперервні функції. Вимога неперервної диференційовної функції є вельми істотною. У випадку залежності податкових виплат  $T$  від річного доходу  $I$  платника податків, похідна  $\frac{dT}{dI}$  є розривною ступінчатою функцією (рис. 5.6.1)

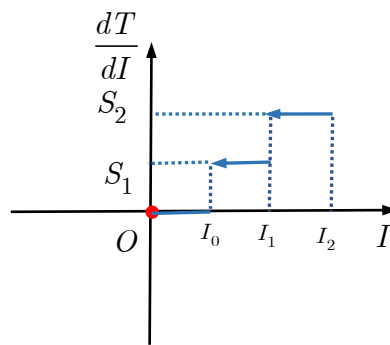


Рис. 5.6.1. Графік похідної  $\frac{dT}{dI}$ .

Розглянемо найпростішу економіко-математичну модель, яка пов'язує між собою дохід  $I$ , споживання  $C$  та інвестиції  $i$  деякого суб'єкту ринку.

Нехай

$$I = C + i.$$

Дохід використовується виключно для споживання та інвестицій, причому

$$I = I(i), C = C(I).$$

Розглянемо, як пов'язані прирости інвестицій та доходу. Маємо

$$I(i) = \frac{dC}{dI} \cdot \frac{dI}{di} + 1,$$

тобто

$$\frac{dI}{di} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dI}},$$

у диференціальній формі

$$dI = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dI}} \cdot di,$$

Величина  $\mu = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dI}}$  називається мультиплікатором, вона пов'язує між собою

зміни величин доходів та інвестицій.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках:

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПП ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184.  
<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf>

3). Конспект лекцій по высшей математике: полный курс /Д. Т. Письменный. - 4-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2006.-608 с.: ил. - (Высшее образование).

<http://kvm.gubkin.ru/pub/vnz/Pismennyi.pdf>

4) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>