

Лекція 6. Диференціал та еластичність

6.1. Поняття диференціалу функції

6.2. Диференціали вищих порядків

6.3. Еластичність. Рівноважна ціна. Еластичність попиту і пропозиції

6.4. Зв'язок еластичності з доходом

6.5. Оптимальна ціна. Оптимальний обсяг виробництва

6.1. Поняття диференціалу функції

1. Припустимо, функція f має скінченну похідну, тобто, диференційовна в точці x_0 .

Означення 6.1 (диференціала функції в точці)

Диференціалом функції f у точці x_0 називають таку частину приросту цієї функції, яка еквівалентна цьому приросту та лінійна щодо приросту Δx , і позначають

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

2. Знайдемо, наприклад, диференціал функції $f(x) = x^2$.

Оскільки

$$f'(x) = (x^2)' = 2x,$$

то

$$df(x) = 2x dx = 2x \Delta x,$$

Якщо записати диференціал для функції $f(x) = x$, то одержимо, що диференціал незалежної змінної дорівнює приросту цієї змінної і, отже, формулу для обчислення диференціала можна ще записати так:

$$df(x) = f'(x) dx.$$

З неї випливає рівність

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Отже, позначення $df(x)/dx$ можна розглядати як відношення двох диференціалів: $df(x)$ та dx .

3. Геометрично диференціал функції f у точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної у точці.

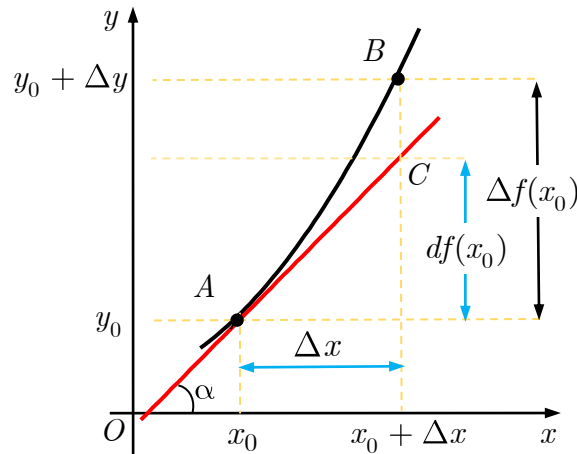


Рис. 6.1.1. Геометричний зміст диференціалу функції в точці

Основне практичне застосування диференціалу – для наближення обчислень:

$$y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) \approx dy,$$

звідки

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Приклад.

Обчислимо наближено $\sqrt[3]{7,97}$. Для цього розгляньмо функцію $y(x) = \sqrt[3]{x}$, виберемо $x_0 = 8$, $\Delta x = -0,03$. Зауваживши, що $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, причому

$$y(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2, \quad y'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}, \text{ маємо:}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7,97} &= y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x = \\ &= 2 + \frac{1}{12}(-0,03) = 2 - \frac{0,01}{4} = 1,9975. \end{aligned}$$

6.2. Диференціали вищих порядків

1. Нехай функція f є диференційовною. Її диференціал (диференціал 1-го порядку)

$$df(x) = f'(x)dx$$

залежить від x та dx .

Диференціалом 2-го порядку (другим диференціалом) функції f називають диференціал від диференціала 1-го порядку і позначають

$$d^2 f = d(df).$$

Означення 6.2
(диференціала
 n -го порядку)

Диференціалом n -го порядку (n -м диференціалом) функції f називають диференціал від диференціала $(n - 1)$ -го порядку і позначають

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)), n \in \mathbb{N},$$
$$d^0 f(x) = f(x).$$

2. Нехай f є функцією незалежної змінної x , що має диференціали будь-якого порядку. Тоді

$$df(x) = f'(x)dx,$$

де $dx = \Delta x$ є сталим. За означенням,

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2.$$

Маємо,

$$d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Аналогічно

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = d(f''(x)(dx)^2) = d(f''(x))(dx)^2 =$$
$$= (f'''(x)dx)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 = f'''(x)dx^3.$$

Тоді

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

6.3. Еластичність. Рівноважна ціна. Еластичність попиту і пропозиції

За допомогою поняття похідної в економіці впроваджують поняття *еластичності*.

Означення 6.3 (Еластичністю функції)

Еластичністю функції $y = f(x)$ *відносно змінної* x *називають* границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x :

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Величину $E_x(y)$ при заданому значенні x *називають* також *коефіцієнтом* або *показником еластичності*. Еластичність функції відносно x є наближений відсотковий приріст функції (підвищення або пониження), що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

Властивості еластичності функції

1) Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темпи зміни функції: $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто :

$$E_x(y) = x(\ln y)'$$

2) Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей цих функцій:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

3) Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичності цих функцій:

$$E_x \left(\frac{u}{v} \right) = E_x(u) - E_x(v).$$

4) Якщо $C = const$, то

$$E_x(cu) = E_x(u).$$

Приклад.

1. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис.грн.) і випуском продукції x (тис. одиниць) виражається функцією

$$y = -0,5x + 80 \text{ (грн.)}.$$

Знайти еластичність собівартості, якщо випуск продукції складає 60 тис. одиниць.

Розв'язання. Обчислимо еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{x}{-0,5x + 80} \cdot (-0,5) = \frac{x}{x - 160};$$

$$E_{60}(y) = \frac{60}{60 - 160} = -0,6;$$

тобто, у разі випуску продукції на 60 млрд. грн. збільшення його на 1% призведе до зниження собівартості приблизно на 0,6%.

Еластичність функції застосовується для аналізу попиту й споживання, прогнозів цінової політики.

Нехай $q = q(p)$ – об'єм попиту на товар ціною p за одиницю.

Означення 6.4
(Еластичність
попиту за
ціною)

Еластичність попиту за ціною називається наступне співвідношення:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot q'.$$

Еластичність виражає приблизну відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-який товар або послугу зі зміною ціни на 1% і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Характеризація еластичності попиту за ціною.

1) Якщо цінова еластичність попиту за абсолютною величиною $|E_p(q)| > 1$, то попит вважають **еластичним**.

2) Якщо $|E_p(q)| = 1$ – **нейтральним**, якщо $|E_p(q)| < 1$, то попит **нееластичний**.

Додатність еластичності попиту за доходом характеризує **нормальні (якісні) товари**, а її *від'ємне значення* – **малоцінні (неякісні) товари**.

Використання поняття еластичності при вивченні залежності попиту від ціни

Найпоширенішим є використання поняття еластичності при вивченні залежності попиту від ціни. Насправді, при управлінні продажами певного товару питання зміни об'ємів реалізації при зміні ціни, пов'язані з проблемами дохідності, виробничих та логістичних витрат, є чи не найважливішими.

Приклад.

1. Нехай маємо функцію попиту:

$$D(p) = \frac{3}{p+1},$$

і функцію пропозиції:

$$S(p) = 2p - 3.$$

Визначимо **рівноважну ціну** p^* , за якої

$$D(p^*) = S(p^*),$$

та відповідні значення пропозиції та попиту. Маємо:

$$2p^{*2} - p^* - 6 = 0, p_1^* = 2, p_2^* = -\frac{3}{2} \text{ - сторонній корінь.}$$

Таким чином, $p^* = 2$.

Знайдемо еластичність попиту

$$E_D(p) = \frac{p}{D(p)} \cdot \frac{D(p)}{p} = p \left(\frac{3}{p+1} \right)^{-1} \cdot \left(-\frac{3}{(p+1)^2} \right) = -\frac{p}{p+1} .$$

Тоді

$$E_D(p^*) = -\frac{2}{3} .$$

Зауважимо, що у даному випадку попит є нееластичним: $(|E_D(p)| < 1)$, що дає можливість підвищувати дохідність продажів шляхом підвищення ціни, наскільки це дозволяють видатки при реалізації товару. Наприклад, при підвищенні ціни на 1 % порівняно з рівноважною, попит знизиться лише приблизно на 0,66%.

2. Нехай функція попиту на товар, який випускає деяка фірма, змодельована залежністю

$$q(p) = q_0 e^{-kp^2} ,$$

де q_0 і $k > 0$ – відомі величини. Визначимо, за якої ціни p попит буде еластичним.

Розв'язання. Обчислимо еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p, \quad E_p(q) = \frac{-2kpq_0 e^{-kp^2}}{q_0 e^{-kp^2}} \cdot p = -2kp^2 .$$

Аби попит був еластичним, необхідно, щоб виконувалася нерівність $2kp^2 > 1$.

Отже,

$$p > 1/\sqrt{2k} .$$

6.4. Зв'язок еластичності з доходом

Еластичність попиту q на певний товар за величиною доходу споживача R :

$$E_R(q) = \frac{dq}{q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{q} \cdot \frac{dq}{dR},$$

виражає приблизну відносну зміну (в процентах) попиту на будь-який товар або послугу в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1%.

Річний дохід фірми обчислюється за формулою:

$$R(p) = q(p) \cdot p$$

і залежить як від ціни товару, так і від попиту на нього на ринку, тобто, дохід може зростати або спадати. Обчислимо похідну цієї функції

$$R'(p) = q + pq'_p = q(1 + E_p(q))$$

Для того, щоб річний дохід фірми збільшився, потрібно, щоб функція доходу зростала, тобто її похідна була додатною. Проаналізуємо всі варіанти еластичності попиту:

1. $E_p(q) < -1$. Тоді $R'(p) < 0$, тобто, за еластичного попиту та від'ємної його еластичності збільшення ціни спричиняє зниження доходу.
2. $E_p(q) = -1$. Тоді $R'(p) = 0$, тобто, за нейтрального попиту зміна ціни на товар не впливає на дохід.
3. $E_p(q) > -1$. Тоді $R'(p) > 0$, тобто за нееластичного або додатного еластичного попиту збільшення ціни зумовлює збільшення доходу.

6.5. Оптимальна ціна. Оптимальний обсяг виробництва.

Нехай монополіст, знаючи функцію попиту на свою продукцію, вирішує, скільки її виробляти і за якою ціною продавати. Якщо монополіст встановить занадто високу ціну, то споживачі, у випадку від'ємної еластичності, за певний період придбають у нього не дуже багато продукції. Якщо ж він вироблятиме більше продукції, то йому доведеться знизити ціну.

Для того, щоб визначити обсяг оптимального (з точки зору отримання максимального прибутку) об'єму випуску продукції, монополіст має знати залежність прибутку від обсягу продукції.

Нехай задано функцію доходу $R = R(q)$ і функцію витрат $C = C(q)$ фірми. Тоді **функція її прибутку** від випуску продукції має вигляд

$$P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q).$$

Логічно поставити питання: за якого обсягу продукції прибуток фірми буде максимальним? Відповідь визначається за допомогою похідної.

Приклад.

На основі досліджень була встановлена залежність попиту q від ціни p за одиницю товару:

$$q = 100000 - 200p,$$

де q – кількість одиниць товару для продажу за рік. Витрати на випуск q одиниць товару складають:

$$C(q) = 150000 + 100q + 0,003q^2.$$

Розрахувати річний прибуток фірми і визначити його максимальне значення.

Розв'язання. За умовою задачі:

$$p = 500 - \frac{q}{200}.$$

Маємо:

$$R(q) = 500q - \frac{q^2}{200}.$$

Річний прибуток розраховується наступним чином:

$$P(q) = 500q - \frac{q^2}{200} - (150000 + 100q + 0,003q^2) = -0,008q^2 + 400q - 150000.$$

Визначимо максимальний прибуток.

$$P'(q) = -0,016q + 400;$$

$$-0,016q + 400 = 0.$$

Отже, $q^* = 25000$ - оптимальний об'єм продаж, а $P^*(25000) = 4850000$ грн. – максимальне значення прибутку.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках:

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клєсова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184.
<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf>

3). Барковський В.В., Барковська Н.В. математика для економістів. Вища математика. —К.:Нац. Академія управління, 1997, —382с.

4) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>

5) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (I курс I семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/Konspekt%20Dyferencialne%20ta%20integralne%20chyslenia.pdf>