Лекція 7. Дослідження функцій

7.1. Монотонність функцій
7.2. Локальні екстремуми функції
7.3. Найменше та найбільше значення функції
7.4. Опуклість функцій і точки перегину
7.5. Асимптоти графіка функції
7.6. Схема повного дослідження функції

7.1. Монотонність функцій

1. Застосуймо диференціальне числення до дослідження функцій та побудови їх графіків. Одним із застосувань похідної є дослідження функцій і побудова їхніх графіків.

Теорема 7.1	Якщо функція $f(x)$ 1) неперервна на відрізку $[a;b]$, 2) диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і 3) $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то функція f зростає (спадає) на відрізку $[a;b]$. 4)така функція f є сталою на відрізку $[a;b]$ тоді й лише тоді, коли $f'(x) = 0, x \in [a;b]$.

2. Якщо функція f зростає (спадає) в $(a;b)$, то це ще не означає, що $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ в усіх точках проміжку.

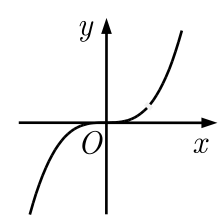


Рис. 7.1.1.
Зростаюча функція

Наприклад, функція $y = x^3$ зростає в $(-\infty;+\infty)$, однак $y'(0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$ (рис. 7.1.1).

Таким чином, для знаходження **інтервалів монотонності** функції необхідно знайти її похідну і визначити інтервали, на яких вона має сталий знак (плюс або мінус).

Означення 7.1 **(критичної точки 1-го порядку).**	Нехай функція f означена в околі точки x_0. Точку x_0 називають *критичною точкою 1-го порядку* функції f, якщо виконано одну з умов: 1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f'(x_0) = \infty$; 3) $\nexists f'(x_0)$.

Геометрично ці умови означають, що у критичній точці 1-го порядку дотична або паралельна осі Ox (умова 1) (такі точки називають *стаціонарними*), або паралельна осі Oy (умова 2) (такі точки називають *точками вертання*) або дотичної не існує (умова 3) (такі точки називають *кутовими*) (рис. 7.1.2).

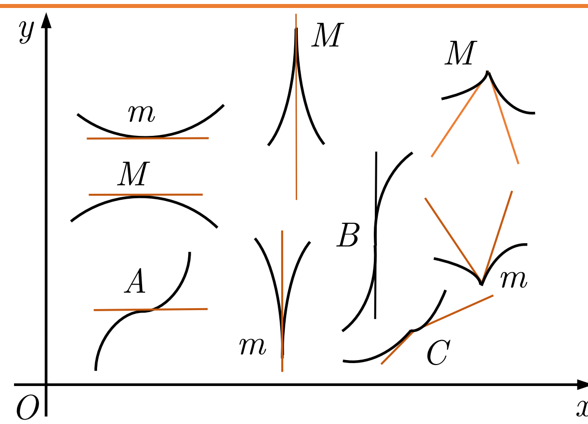


Рис. 7.1.2. Критичні точки 1-го порядку

7.2. Локальні екстремуми функції

Теорема 7.2 **(необхідна умова локального екстремуму)**	Якщо функція f у точці x_0 досягає локального екстремуму, то в цій точці виконано одну з умов: 1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f'(x_0) = \infty$;3) $\nexists f'(x_0)$.

Тобто, точка, у якій функція досягає локального екстремуму є критичною точкою 1-го порядку. Обернене твердження неправильне: не всяка критична точка 1-го порядку є точкою локального екстремуму.

Точкою максимуму (мінімуму) функції $y = f(x)$ *називається* точка $x = x_0$, якщо існує такий окіл цієї точки для всіх точок x, якого при $x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$). Точки максимуму та мінімуму *називаються* **точками локальних екстремумів функції** (для економічних показників – точками локальних **оптимумів**).

У **точках екстремумів** диференційованої функції дотичні до її графіка паралельні осі абсцис, тобто похідна **дорівнює нулю**. Таким чином, **необхідною умовою того, диференційована функція має екстремум в точці x_0 є виконання рівності $f'(x_0) = 0$ (**рис. 7.2.1**).**

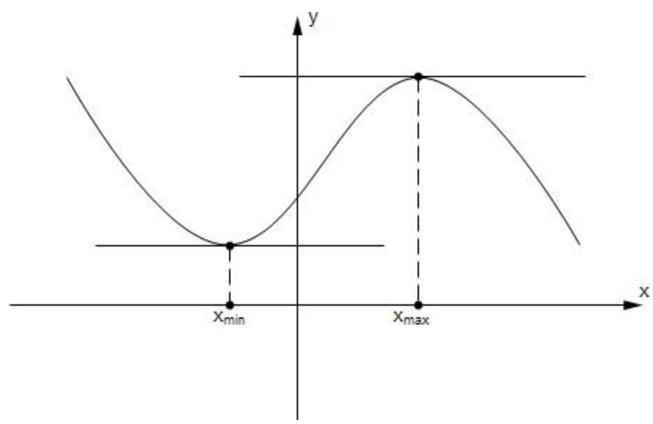


Рис 7.2.1.

Приклад.

Визначимо екстремуми функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.
Для знаходження стаціонарних точок прирівняємо похідну даної функції до нуля:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0.$$

Розв’язуючи отримане квадратне рівняння, знаходимо корені:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Визначимо характер цих точок. Оскільки графік квадратного тричлена $y' = 3x^2 - 6x - 9$ схематично має вигляд (рис 7.2.2)

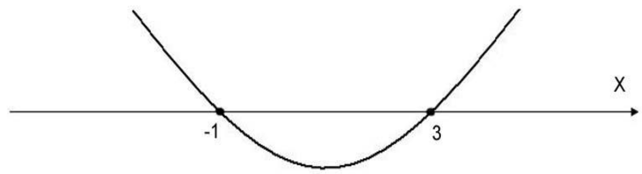


Рис 7.2.2

То точка $x_1 = -1$ є точкою локального максимуму (при $x < -1, y'(x) > 0$, при $x > -1, y'(x) < 0$), а точка $x_2 = 3$ - точкою локального мінімуму (при $x < 3, y'(x) < 0$ при $x > 3, y'(x) > 0$).

Як було сказано вище, функція, неперервна на проміжку $[a;b]$ досягає свого найменшого m та найбільшого M значень. Якщо функція диференційована, то точки, в яких вони досягаються (і, відповідно, самі ці значення) можуть бути знайдені за наступним **алгоритмом**:

Алгоритм

1. визначаємо всі критичні точки першого роду, які належать $[a;b]$***;***

2. обчислюємо значення $f(a)$, $f(b)$ ***та значення функцій в знайдених критичних точках;***

3. із одержаних значень функції вибираємо найменше (m) ***та найбільше*** (M).

Приклад. Повертаючись до попереднього прикладу, визначимо найменше та найбільше значення вказаної функції на інтервалі $[-2;1]$. Оскільки цьому інтервалу належить одна зі стаціонарних точок $x_1=-1$, то обчислимо значення функції

$$f(-2)=3,\ f(-1)=10,\ f(1)=-6.$$

Таким чином, найменше значення функції на цьому інтервалі $m=f(1)=-6$, а найбільше : $M=f(-1)=10$.

7.3. Найменше та найбільше значення функції

1. За теоремою Ваєрштраса неперервна на відрізку $[a;b]$ функція досягає на цьому відрізку свого найменшого та найбільшого значення, які ще називають *глобальними екстремумами* функції на відрізку (рис. 7.3.1).

Ці значення функція може набувати або в точках локальних екстремумів в інтервалі $(a;b)$, або на межі при $x=a$ чи $x=b$.

2. Наприклад, функція $f(x)=x^2$ на відрізку $[-1;2]$ набуває свого найменшого значення в стаціонарній точці $x=0$, а свого найбільшого значення на правому кінці відрізка — у точці $x=2$:

$$\min_{x\in[-1;2]} f(x)=f(0)=0;$$
$$\max_{x\in[-1;2]} f(x)=f(2)=4.$$

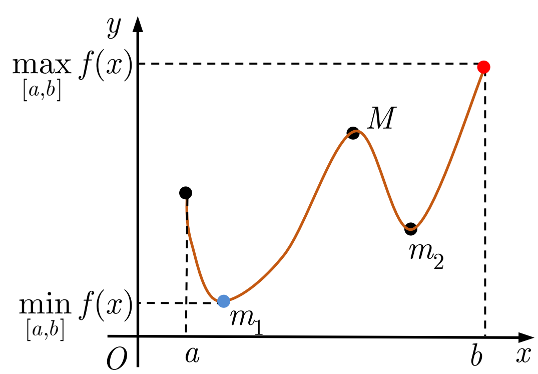


Рис. 7.3.1. Глобальні екстремуми функції

Приклад.

Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 3, x \in [-1;2].$$

Розв'язання.

Функція f неперервна на відрізку $[-1;2]$.

Знаходимо критичні точки 1-го порядку функції f в $(-1;2)$.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2;$$

$$f'(x) \neq \infty, \exists f'(x), x \in (-1;2)$$

$$x_1, x_3 \notin (-1;2); \; x_2 \in (-1;2).$$

Обчислюємо значення функції f у знайдених критичних точках і на кінцях відрізку

$$f(-1) = -4; \; f(0) = 3; \; f(2) = -13.$$

Серед обчислених значень функції вибираємо найбільше та найменше значення функції f на вдрізку.

$$\max_{[-1,2]} f = f(0) = 3;$$

$$\min_{[-1,2]} f = f(2) = -13.$$

7.4. Опуклість функцій і точки перегину

Будемо *називати* графік функції **опуклим догори** на інтервалі $(a;b)$, якщо він лежить нижче всіх дотичних на цьому інтервалі. Відповідно, графік функції **опуклим донизу** на інтервалі $(a;b)$, якщо він лежить вище всіх її дотичних на цьому інтервалі.

На рисунку 7.4.1 точка c розділяє інтервали опуклості догори (зліва від неї) та донизу (справа від неї).

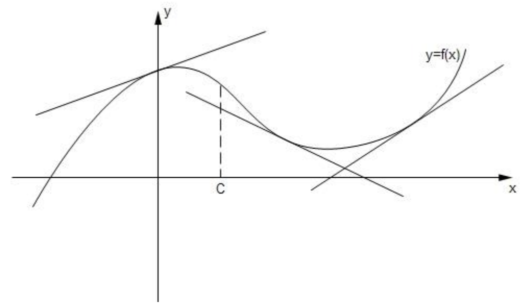


Рис.7.4.1

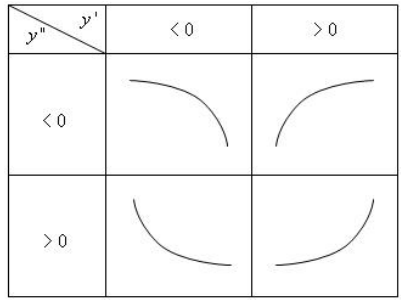
Точка x_0, для якої знайдеться такий окіл, що крива зліва від неї лежить по один бік від дотичної, а справа – по інший бік, *<u>називається</u>* **точкою перегину кривої**, якій вона належить.

Відзначимо, що, наприклад, для кривої , опуклої вниз на інтервалі $(a;b)$, виконується співвідношення

$$f\left(x^*\right) > f\left(x_0\right)\left(x^* - x_0\right) + f\left(x_0\right),$$

тобто, $f\left(x^*\right) - f\left(x_0\right) = f'\left(x_1\right)(x^* - x_0) > f'(x_0)(x^* - x_0)$, де x_0 та x^* $(x_0 < x^*)$ – довільні точки на інтервалі $(a;b)$, x_1 існує за теоремою Лагранжа і знаходиться між x_0 та x^*. Таким чином, $f'\left(x_1\right) > f'(x_0)$, тобто похідна $f'(x)$ є зростаючою функцією, відповідно, $f''(x) > 0$. Наведені міркування пояснюють чому, якщо на інтервалі $(a;b)$ $f''(x) > 0$ – **функція опукла донизу**, $f''(x) < 0$ – **функція опукла догори**. Для знаходження інтервалів опуклості графіка функції догори та донизу визначають **критичні точки другого роду функції** – точки, де її друга похідна дорівнює нулю або не існує, після чого визначають знаки другої похідної на інтервалах між ними.

Для практичної побудови графіка корисна наочна таблиця, яка демонструє вигляд елементів графіка в залежності від знаків першої та другої похідних функції.



Приклад.

Розглянемо функцію $y=(x-1)(x-3)^3$. Для неї

$$\begin{aligned}y' &= (x-1)'\cdot(x-2)^3+(x-1)\left[(x-2)^3\right]' = \\ &= (x-1)'\cdot(x-2)^3+(x-1)\left[(x-2)^3\right]' = \\ &= (x-2)^3+(x-1)\cdot 3\cdot(x-2)^2=(x-2)^2(4x-5).\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}y'' &= \left[(x-2)^2\right]'\cdot(4x-5)+(x-2)^2\cdot(4x-5)' = \\ &= 2(x-2)\cdot(4x-5)+(x-2)^2\cdot 4=12(x-2)(x-\frac{3}{2}).\end{aligned}$$

Таким чином, критичними точками другого роду для даної функції є $x=\frac{3}{2}$ та $x=2$. Оскільки схематичний графік іі другої похідної має вигляд (рис. 7.4.2)

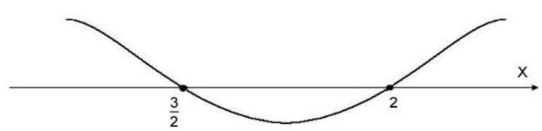
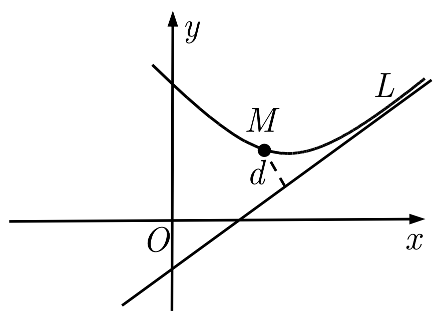


Рис 7.4.2

то функція опукла донизу при $x\in\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)\cup\ 2;+\infty$, опукла вгору при $x\in\left(\frac{3}{2};2\right)$, $x=\frac{3}{2}$, $x=2$- точки перегину.

7.5. Асимптоти графіка функції

1. Розгляньмо криву L з нескінченною гілкою , тобто її ділянкою , яка допускає прямування x або y до нескінченності.

Означення 7.2 (асимптоти).	*Асимптотою* кривої L називають таку пряму, що віддаль d від точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M віддаляється вздовж нескінченної гілки кривої від початку координат (рис. 7.5.1).  Рис. 7.5.1 Асимптота кривої

Пряма $x = x_0$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$\boxed{\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty} \text{ або } \boxed{\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty.}$$

Справді, при цьому віддаль

$$d = \left|x - x_0\right|$$

від точки $M(x; f(x_0))$ графіка функції $y = f(x)$ до прямої $x = x_0$ прямує до нуля і точка M необмежено віддаляється від початку координат (рис. 7.5. 2).

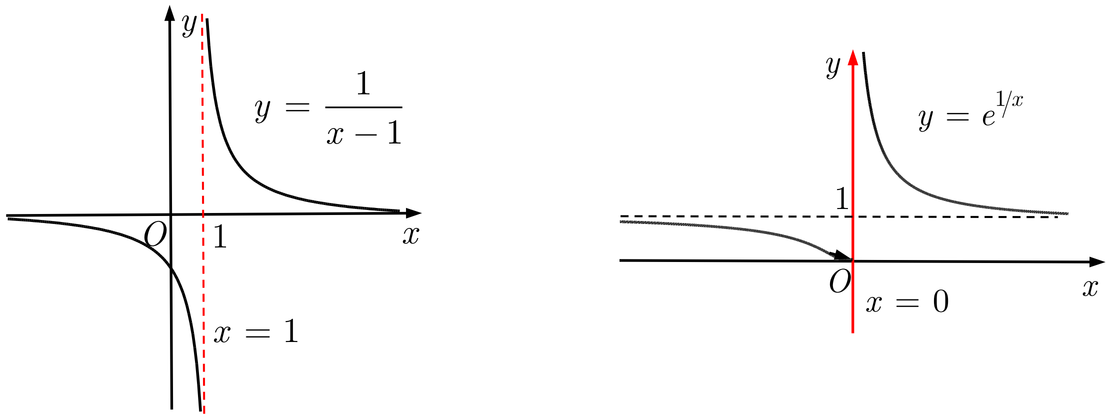


Рис. 7.5.2. Приклади вертикальних асимптот

2. Для знаходження похилих та горизонтальних асимптот чинять так: знаходять границю

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x},$$

якщо вона існує, то границю

$$b_1 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_1 x),$$

якщо вона також існує, то пряма $y = k_1 x + b_1$ є похилою (горизонтальною у випадку $k = 0$) асимптотою графіка функції при $x \to -\infty$. Після цього аналогічно розглядають $k_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - k_2 x)$

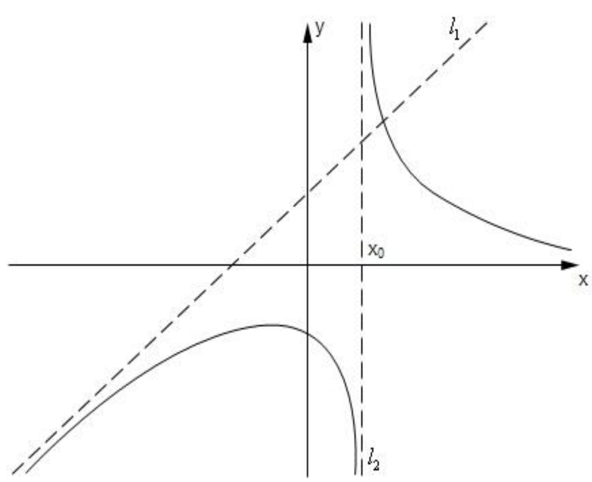


Рис 7.5.3. Вертикальна та горизонтальна асимптоти

На рисунку 7.5.3. l_1 – похила асимптота при $x \to -\infty$, l_2 – вертикальна асимптота при $x \to x_0$, l_3 – вісь абсцис – горизонтальна асимптота при $x \to +\infty$.

Теорема 7.3 **(критерій існування похилої асимптоти).**	Графік функції $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$, тоді й лише тоді, коли існують скінченні границі: $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$ $$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Приклад.

Для функції $y = x + \dfrac{1}{x}$ зазначимо, перш за все, що вона має точку розриву II-го роду $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = +\infty$, тобто пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка цієї функції.

Перевіримо наявність похилих та горизонтальних асимптоту графіка функції.

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(y - k_1 x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1;$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}(y - k_2 x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Таким чином, пряма $y = x$ є асимптотою (похилою) графіка функції при $x \to \pm\infty$.

7.6. Схема повного дослідження функції

Як відомо, в шкільному курсі математики розглядалися методи побудови графіків функцій, що ґрунтуються на перетвореннях графіків основних елементарних функцій. Дуже розповсюдженим (наприклад, при аналізі експериментальних даних, є побудова графіка як лінії, яка проходить через задані точки. Методи диференціального числення дозволяють побудувати графік аналітично заданої функції шляхом використання наступної схеми її дослідження.

1) **Використання виду функції**.
   а) Знаходження області визначення функції, її точок розриву (із визначенням їх типів), інтервалів неперервності.
   б) Дослідження функції на парність-непарність, періодичність.
   в) Знаходження асимптот графіка функції.
   г) Визначення точок перетину графіка з координатними осями.
2) **Використання похідної першого порядку**.
   Знаходження критичних точок першого роду функції та значень функції в цих точках, інтервалів монотонності, точок екстремумів.
3) **Використання похідної другого порядку**.
   Знаходження критичних точок другого роду та значень функції в цих точках, визначення проміжків опуклості графіка вгору та вниз.
4) **Побудова графіка**.
   На координатну площину наносять всі знайдені точки та будують асимптоти графіка, точки з'єднуються із врахуванням наведеної вище наочної таблиці.

Приклад.

Проведемо повне дослідження та побудуємо графік функції

$$y(x) = xe^{-x^2}.$$

1) Використання виду функції.

а) Функція визначена для всіх $x \in R$, точок розриву немає, а значить неперервна на всій числовій осі.

б) Функція непарна

$$y(-x) = -x \cdot e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -y(x),$$

неперіодична.

в) Вертикальних асимптот графік функції не має. Дослідимо функцію на наявність похилих та гармонічних асимптот:

$$k_1 = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{-x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{-x^2} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x^2} \cdot 2x} = 0,$$

$$k_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-x^2} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x'}{\left(e^{x^2}\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2} \cdot 2x} = 0.$$

Таким чином пряма $y = 0$ (вісь абсцис) є асимптотою для графіка даної функції при $x \to \pm\infty$.

Для визначення точок перетину графіка функції з координатними осями покладемо спочатку $x = 0$,

$$y(0) = 0.$$

Прирівнявши $y = 0$ маємо $xe^{-x^2} = 0$ отримуємо знову $x = 0$. Таким чином єдиною точкою перетину графіка функції з координатними осями є точка $(0,0)$.

2)Використання похідної першого порядку.

Знайдемо похідну функції

$$y' = x' \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = \left(1-2x^2\right)e^{-x^2} =$$

$$= -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}.$$

Таким чином при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ похідна від'ємна – функція спадає. Точка $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ - точка локального максимуму,

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

3)Використання похідної другого порядку.

Знайдемо другу похідну даної функції

$$y'' = \left(\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\right)' = \left(1-2x^2\right)' e^{-x^2} + \left(1-2x^2\right)\left(e^{-x^2}\right)' =$$

$$= -4xe^{-x^2} + \left(1-2x^2\right)e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x\left(3-2x^2\right)e^{-x^2} = 4x\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)e^{-x^2}.$$

Друга похідна додатна при

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right).$$

На цьому інтервалі графік функції опуклий вниз.
Для

$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

маємо

$$y'' < 0$$

тому графік функції опуклий вгору. Точки

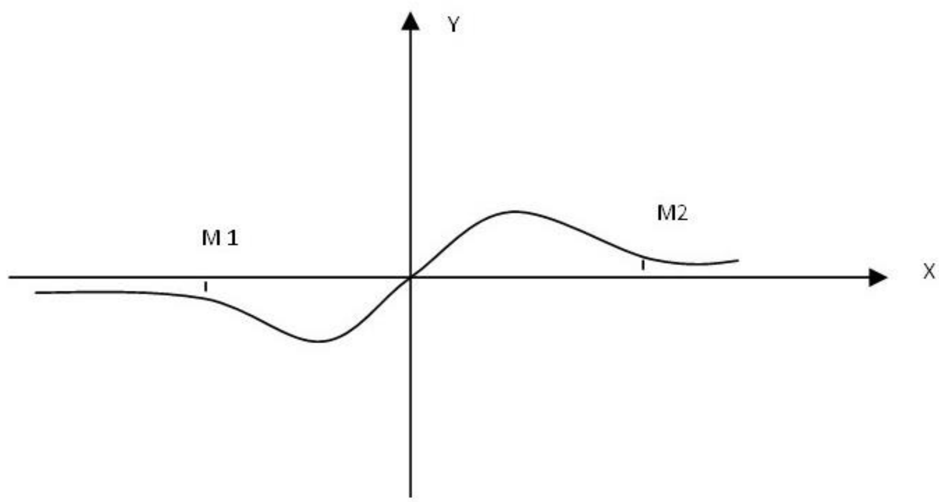
$$M_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$$

та

$$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$$

- точки перегину на графіку функції.

Остаточно маємо



<u>Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках</u>

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf