

## Лекція 8. Диференціювання у задачах економіки та бізнесу

8.1. Виробничі функції однопродуктових фірм

8.2. Оптимальні рішення в економіці та бізнесі

8.3. Закон спадання ефективності виробництва

### 8.1 Виробничі функції однопродуктових фірм

Розглянемо приклади безпосереднього застосування диференціального числення у виробничих та управлінських задачах.

Розглянемо підприємство, діяльність якого зосереджена на випуску лише *одного виду продукції*. Припустимо також, що при цьому використовується єдиний тип ресурсів. Позначивши **об'єм використаних ресурсів** через  $x$ , а **об'єм випущеної продукції** через  $y$ , маємо характеристику підприємства за допомогою його виробничої функції

$$y = y(x) .$$

Будемо вважати, що виробнича функція задовольняє наступні умови:

- 1) функція є двічі неперервно диференційовною;
- 2) в області  $D(f)$ , яка являє собою множину можливих значень ресурсу  $x$  (така область  $D$  входить до області визначення функції  $f$  і називається економічною областю), функція  $f$  є неспадною, тобто збільшення обсягу використаних ресурсів спричиняє зменшення об'єму виробленої продукції;
- 3) існує підмножина  $E$  економічної області  $D$  така, що при всіх  $x \in E \subseteq D$   $f''(x) \leq 0$ . З цих умов випливає, що похідна  $f'(x) \geq 0$  при  $x \in D(f)$ . У цьому випадку похідна  $f'(x)$  називається **граничним продуктом** підприємства (фірми). Така умова має чітке економічне обґрунтування: у раціонально організованому виробництві збільшення витрат ресурсу не може викликати зменшення випуску продукції.

**Зауваження.** Умову 3 у економічній теорії називають **законом спадної доходності**: зі збільшенням використаного при виробництві ресурсу ( при потраплянні такого об'єму у область  $E$ ) спостерігається зменшення граничного продукту.

### Максимізація прибутку фірми

Розгляньмо можливу діяльність підприємства. Нехай  $p$  – ціна одиниці ресурсу, а  $w$  – ціна одиниці продукції цього підприємства. На первинному аналізі діяльності підприємства можна припустити, що ці величини є сталими, незалежними від часу, об'єму випуску продукції та поточного стану ринку. Задача фірми полягає у максимізації її прибутку

$$P(x) = wf(x) - px,$$

тобто у знаходженні такого  $x \geq 0$ , при якому величина прибутку  $P(x)$  набуває максимального значення. Таким чином, маємо задачу знаходження екстремуму диференційованої функції. А, отже,

$$P'(x) = wf'(x) - p = 0,$$

$$f'(x) = \frac{p}{w}. \quad (8.1)$$

Знайдена таким чином точка  $x^* \geq 0$  є точкою максимуму, якщо  $f''(x^*) < 0$ .

### Приклад.

Фермер наймає робітників для збирання полуниць, причому вартість збирання 1 кг. полуниць визначена ним у 10 грн. Кількість найнятих робітників -  $x$ , оплата погодинна- 50 грн/год, виробнича функція визначається як кількість зібраних протягом години полуниць та задається співвідношенням:

$$y = 20\sqrt{x} \text{ (кг/год)}.$$

У такому випадку величина прибутку фермера визначається формулою:

$$P(x) = 10 \cdot 20\sqrt{x} - 50x.$$

Зазначимо, перш за все, що у цьому випадку економічною областю є множина  $x \in [0, \infty)$ . Оскільки  $f''(x) = -\frac{5}{\sqrt{x^3}}$ , то множина зменшення граничного продукту співпадає з економічною областю (за виключенням, очевидно, точки  $x = 0$ ).

Знайдемо тепер похідну  $P'(x)$  та визначимо її критичні точки:

$$P'(x) = 200 \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - 50 = \frac{1}{\sqrt{x}} (2 - \sqrt{x}).$$

Критичними є точки  $x=0$  та  $x=4$ . Першу з них відкидаємо, оскільки відсутність робітників означає відсутність продукції. Отже, функція отримує максимум, коли  $x=4$ . Тобто, фермер отримає максимальний прибуток, найнявши чотирьох робітників.

Далі називатимемо точку(значення використаного ресурсу), у якій досягається максимум прибутку підприємства **оптимальним розв'язком задачі фірми**.

Економічний зміст співвідношення (8.1) полягає у тому, що  $w \cdot f'(x)$  є вартістю граничного продукту, додатково виробленого з одиниці ресурсу, але це має сенс лише у випадку, коли така вартість не перевищує ціни реалізації продукту  $p$ . Точка «рівноваги», у якій досягається рівність між ціною одиниці продукції та її собівартістю, отриманої при зростанні об'єму випуску й визначається співвідношенням (8.1).

## 8.2. Оптимальні рішення в економіці та бізнесі

Розглянемо спочатку ситуацію, коли вищезгадане однопродуктове підприємство працює у монопольній або олігопольній ситуації. У такому випадку, проводячи маркетингові дослідження, воно має можливість встановити:

- яким є попит на його продукцію у залежності від ціни;
- яка ціна встановлюється на ринку, якщо підприємство запропонує той чи інший об'єм своєї продукції.

Зрозуміло, що запропонувавши завищеної ціну на свою продукцію, підприємство програє у кількості проданого товару, наслідки занадто низької ціни теж зрозумілі. Відповідно, на ціну реалізації продукції впливатиме об'єм її виробництва.

Для аналізу такої ситуації запровадимо наступні функції, що залежать від об'єму випущеної продукції:

- $R = R(q)$  – дохід від реалізації на ринку об'єму  $q$  продукції підприємства;
- $C = C(q)$  – видатки підприємства при випуску об'єму  $q$  продукції;

- $P = P(q)$  – прибуток підприємства при випуску об'єму  $q$  продукції.

Зрозуміло, що

$$P(q) = R(q) - C(q).$$

Будемо вважати, що можливий об'єм випуску продукції, відповідно до технологічних, логістичних, фінансових та інших можливостей підприємства належить відрізку  $[0, Q]$ . Будемо вважати, що функції  $R = R(q)$  та  $C = C(q)$  визначені та неперервно диференційовані на відрізку  $[0, Q]$ .

У такому випадку задача максимізації прибутку є задачею знаходження максимального значення функції  $P(q)$  на відрізку  $[0, Q]$  і передбачає :

- знаходження критичних точок функції  $P(q)$  на інтервалі  $(0, Q)$ ;
- обчислення  $P(0)$  та  $P(Q)$ ;
- порівняння значень функції  $P(q)$  у точках локальних максимумів та на кінцях відрізка.

Зауважимо, що теоретично можливим є, наприклад, випадок, коли функція  $P(q)$  досягає свого найбільшого значення при  $q = 0$ , тобто, випуск цього виду продукції є в принципі нерентабельним.

Стационарні точки функції  $P(q)$  визначаються рівністю  $R'(q^*) = C'(q^*)$ , де  $q^*$  – об'єм випуску продукції, який може бути оптимальним. Таким чином, якщо оптимальний об'єм випуску  $\bar{q}$  не співпадає з максимально можливим  $Q$ , то

$$R'(\bar{q}) = C'(\bar{q}) \quad (8.2)$$

Тобто, справедливий **базовий економічний принцип**.

**Твердження 8.1**  
**(базовий економічний принцип)**

Оптимальний продуктивний рівень фірми досягається при співпадінні граничного доходу з граничними витратами.

Припустивши, що об'єм випуску продукції не впливає на її ціну, отримуємо

$$R(q) = p \cdot q, R'(q) = p,$$

Звідки

$$C'(\bar{q}) = p. \quad (8.3)$$

### Приклад.

Нехай видатки фірми на випуск  $q$  одиниць продукції визначається рівністю  $C(q) = q^2 + 4q$  тис. г.о. Ринкова ціна однієї одиниці продукції складає 16 (тис. г.о.). Тоді маємо

$$\begin{aligned} P(q) &= 16q - q^2 - 4q \\ P'(q) &= 16 - 2q - 4 = 0 \end{aligned}$$

звідки  $\bar{q} = 6$ .

Зазначимо, що отримане значення оптимальної продуктивності є дійсно таким, що забезпечує найбільший можливий прибуток, оскільки стаціонарна точка єдина, а величина  $Q$  у даному випадку дорівнює 12.

$$P(q) = 12q - q^2 \geq 0 \Rightarrow q \in [0, 12].$$

При цьому  $P(0) = P(12) = 0$ .

Повернімося до випадку фірми-монополіста. Оскільки такі фірми реалізують на ринку повний об'єм

Випущеної продукції, то ціна на неї визначається функцією попиту, тобто, залежить від об'єму запропонованої ринку продукції. Таким чином, маємо

$$p = p(q), P(q) = q \cdot p(q) - C(q).$$

Тоді маємо необхідну умову екстремуму у вигляді:

$$P'(q) = p(q) - q \cdot p'(q) - C'(q) = 0. \quad (8.4)$$

Останню рівність перетворимо до вигляду

$$p(q) \left( 1 + \frac{q}{p} P'(q) \right) = C'(q).$$

Звідки

$$p(q^*) = \frac{C'(q)}{E_p(q) + 1},$$

де  $E_p(q)$  – **цінова еластичність об'єму продукції**, яка реалізується на ринку. З останньої формули випливає, що ціна реалізації у монополіста завжди менша за граничні видатки, якщо цінова еластичність попиту від'ємна (ця умова не виконується у рідкісних випадках).

Окрім монополістів аналогічну властивість мають і об'єми реалізації для фірм, які контролюють істотну частину ринку.

### Приклад.

Нехай функція прибутку фірми має вигляд  $P(q) = q^2 - 16q - 70$ . Яким є оптимальний для неї об'єм виробництва?

Значимо, що у даному випадку  $P(q) > 0$  при  $q > 0$ , тобто, випуск даної продукції є прибутковим при будь-якому об'ємі виробництва. Похідна  $P'(q) = 2q - 16$  і від'ємна при  $q > 8$  (прибуток зростає при нарощуванні виробництва).

Таким чином, для даного підприємства оптимальним є максимальне нарощування випуску продукції. Проте, таке нарощування має сенс від досягнутого рівня у 8 одиниць продукції. Якщо ж таке виявиться неможливим, то оптимальним є припинення випуску цих виробів. Отримання додатного прибутку у разі нульового випуску продукції видається парадоксальним, проте насправді у деяких випадках, наприклад, державні субсидії, картельні угоди, воно виявляється можливим.

### Приклад.

Нехай фірма реалізує свою продукцію за фіксованою ціною  $p$  г.о. за одиницю продукції. При цьому функція витрат визначена формулою .  
Визначимо оптимальний об'єм випуску продукції та відповідний йому прибуток.

Маємо:

$$P(q) = p \cdot q - (Aq + Bq^3) = -Bq^3 + (p - A)q.$$

Звідки критичні точки визначає рівняння:

$$P'(q) = -3Bq^2 + (p - A) = 0.$$

Отже,

$$q^* = \sqrt{\frac{p - A}{3B}}.$$

Зазначимо, що існування стаціонарних точок вимагає виконання умови:

$$\frac{p-A}{3B} \geq 0.$$

Розглянемо два випадки:

$$\text{А) } \begin{cases} p \geq A \\ B > 0 \end{cases}.$$

Оскільки  $P''(q^*) = -6Bq^* < 0$ , то така точка є точкою локального максимуму, при  $q > q^*$  функція  $P(q)$  спадатиме, тобто отримуємо оптимальний об'єм продукції,

$$P(q^*) = \sqrt{\frac{p-A}{3B}} \left( p - A - \frac{B}{3} \right) = \frac{2}{3}(p-A) \sqrt{\frac{p-A}{3B}}.$$

$$\text{Б) } \begin{cases} p < A \\ B < 0 \end{cases}.$$

У цьому випадку  $P''(q^*) > 0$ , тобто, маємо точку локального мінімуму і оптимальною стратегією для підприємства є максимальне нарощування об'єму продукції вище рівня  $q^* > 0$ .

### 8.3. Закон спадання ефективності виробництва

#### Твердження 8.2 (Закон спадання ефективності виробництва)

При збільшенні одного з базових факторів виробництва (наприклад, капітальних витрат  $K$ ) приріст виробництва, починаючи з деякого значення цього фактору (у наведеному прикладі з деякого  $K_0$ ), спадає.

**Закон спадання ефективності виробництва** означає, що починаючи з деякого значення фактору, графік залежності об'єму випущеної продукції від значення цього фактору змінює опуклість вниз, на опуклість догори.

## Приклад.

Розглянемо так званий **ЛОГІСТИЧНИЙ ЗАКОН** зміни об'єму виробництва, який часто використовується для математичного моделювання процесів виробництва:

$$P(K) = \frac{P_1 \cdot P_0 \cdot e^{rK}}{P_1 + P_0(e^{rK} - 1)}, \text{ де } P_1, P_0, r > 0.$$

Зауважимо, що у такому випадку  $P(0) = P_0$ , тобто, до початку додаткового фінансування об'єм виробництва дорівнює  $P_0$ . У той же час при необмеженому збільшенні фінансування ( $K \rightarrow +\infty$ ), об'єм виробництва прямує до величини  $K_1 > K_0$ .

Знайдемо похідну функції  $P(K)$ :

$$P'(K) = P_1 \cdot P_0 \cdot r \cdot \frac{e^{rK}}{(P_1 + P_0(e^{rK} - 1))^2} \cdot (P_1 - P_0).$$

Враховуючи зроблене вище зауваження, бачимо, що  $P'(K) > 0$ , тобто, об'єм продукції підприємства неодмінно зростає при збільшенні фінансування. У той же час

$$P''(K) = \frac{P_1 \cdot P_0 \cdot r^2 e^{rK}}{(P_1 + P_0(e^{rK} - 1))^3} \cdot ((P_1 - P_0) - P_0 \cdot e^{rK}).$$

Зрозуміло, що при  $(P_1 - P_0) - P_0 \cdot e^{rK} > 0$  ця функція додатна, а при  $(P_1 - P_0) - P_0 \cdot e^{rK} < 0$  - від'ємна, тобто, похідна  $P'(K)$  зростає на проміжку  $[0, K^*]$  та спадає на проміжку  $[K^*, \infty)$ ,  $K^* = \frac{1}{r} \ln \frac{P_1 - P_0}{P_0}$ , справджує таким чином **ЗАКОН спадання ефективності виробництва**. Проілюструємо це графіком функції  $P(K)$ :

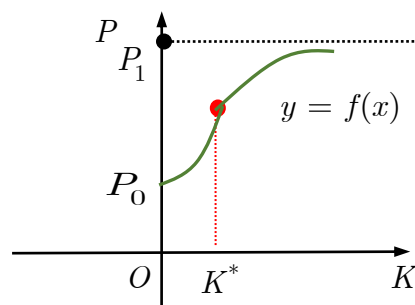


Рис 8.1.1.