

Лекція 9. Первісна. Невизначений інтеграл

- 9.1. Первісна
- 9.2. Невизначений інтеграл
- 9.3. Основні правила інтегрування
- 9.4. Основні формули інтегрування
- 9.5. Основні методи інтегрування

Знаходження похідної заданої функції є однією з основних задач диференціального числення. Різноманітні питання математичного аналізу і його застосувань у математиці, фізиці й техніці приводять до зворотної задачі: знайти функцію, для якої задана функція є похідною.

9.1. Первісна

1. Розгляньмо функції f та F в інтервалі $(a;b)$.

Означення 9.1 (первісної).

Функцію F називають *первісною* функції f в інтервалі $(a;b)$, якщо функція F диференційовна в $(a;b)$ і для будь-якого $x \in (a;b)$ виконано:

$$F'(x) = f(x).$$

Операцію відшукування первісної називають *інтегруванням*.

Так само означають первісну на відрізку $[a;b]$ (під похідними $F'(a)$ та $F'(b)$ розуміють одnobічні похідні $F'(a+0)$ та $F'(b-a)$) або на нескінченному проміжку.

Теорема 9.1 (достатня умова існування первісної).

Якщо функція неперервна на відрізку, то вона має на цьому відрізку первісну.

2. Наприклад, функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на всій числовій осі, оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

3. Задача знаходження первісної заданої функції f має багато розв'язків. Справді, якщо F — первісна функції f на проміжку X , то, оскільки

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), x \in X,$$

то функція $F(x) + C$, де C — стала, є також первісною функції $f(x), x \in X$.

Теорема 9.2
(про первісну).

Якщо F_1 та F_2 є дві різних первісних функції f на проміжку X , то вони відрізняються лише сталим доданком, тобто

$$F_1(x) = F_2(x) + C,$$

де C є сталою.

► Нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ — первісні функції $f(x)$ на проміжку X . Їх різниця $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ є диференційовною функцією:

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Із критерію сталості функції випливає, що $F(x) = C$, тобто,

$$F_1(x) - F_2(x) = C \quad \forall x \in X. \blacktriangleleft$$

9.2. Невизначений інтеграл

1. Нехай функція F є первісною функції f на проміжку X .

Означення 9.2
(невизначеного інтеграла).

Сукупність $\{F(x) + C\}$ всіх первісних функції f на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* від функції f і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Вираз $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, $f(x)$ — *підінтегральною функцією*, x — *змінною інтегрування*, $C \in \mathbb{R}$ — *сталою інтегрування*.

2. З означення неvizначеного інтеграла випливають такі його властивості:

1) похідна від неvizначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

2) диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Отже, правильність інтегрування можна перевірити диференціюванням: похідна від результату інтегрування повинна дорівнювати підінтегральній функції.

9.3. Основні правила інтегрування

1. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Отже,

$$\int dx = x + C.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx, C \neq 0.$$

3. Інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

4. Інваріантність формул інтегрування. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити іншою диференційовною функцією цієї змінної:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C,$$

де $u = u(x)$ — диференційовна функція.

9.3. Основні формули інтегрування

1. Інтегрування — це процес, обернений до диференціювання, то формули інтегрування можна одержати з відповідних формул диференціювання. Формули з таблиці основних формул інтегрування можна одержати похідних елементарних функцій, переписавши їх у зворотному напрямі (справа наліво).

Наприклад, з формули

$$(\sin x)' = \cos x$$

випливає

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

Загальніше, з того що

$$F'(x) = f(x)$$

випливає

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

2. Розглянемо таблицю основних невизначених інтегралів (тут літера u може позначати як незалежну змінну ($u = x$), так і функцію від незалежної змінної ($u = u(x)$)).

$$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$4. \int e^u du = e^u + C.$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$7. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$$

$$8. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$$

$$9. \int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$$

$$10. \int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$$

$$11. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$$

$$12. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$$

$$13. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C \quad (a > 0).$$

$$14. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right| + C \quad (a > 0).$$

$$16. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C \quad (a > 0).$$

$$17. \int \operatorname{tg} u du = -\ln |\cos u| + C.$$

$$18. \int \operatorname{ctg} u du = \ln |\sin u| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Формули таблиці інтегралів часто називають за виглядом їхньої правої частини, зокрема, формулу 13 — «високий логарифм», формулу 15 — «довгий логарифм».

Формули 1—12 випливають з таблиці похідних. Формули 13—20 можна обґрунтувати диференціюванням.

Наприклад, оскільки

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \right)' &= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|)' = \\ &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a}{x^2 - a^2} = \frac{1}{x^2 - a^2}, \end{aligned}$$

то

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad (a > 0).$$

3. Якщо первісна F для функції f є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражається в елементарних функціях. Але не завжди інтеграл від елементарних функцій виражається в елементарних функціях.

Наприклад, доведено, що такі інтеграли не виражаються через елементарні функції:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

9.3. Основні методи інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні правил інтегрування та таблиці основних інтегралів.

$$\begin{aligned} \int \left(4x^2 - \frac{3}{x^2 + 9} \right) dx &= 4 \int x^2 dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C_2 = \\ &= \frac{4x^3}{3} - \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C, \end{aligned}$$

де $C = C_1 + C_2$.

Метод заміни змінної

1. Метод інтегрування заміною змінної полягає в запровадженні нової змінної інтегрування (підстановки). При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтеграла, який є простішим ніж шуканий, «ближчий» до табличного.

Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(t)$ задано відповідно в інтервалах $(a;b)$ та $(\alpha;\beta)$, причому функція φ відображує інтервал $(\alpha;\beta)$ в $(a;b)$.

Теорема 9.3
(про заміну
змінної).

Якщо функція f неперервна в інтервалі $(a;b)$, функція φ неперервно диференційовна і строго монотонна в інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $\varphi'(t) \neq 0$, то правдива *формула заміни змінної* в невизначеному інтегралі:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де у праву частину після інтегрування треба підставити $t = \varphi^{-1}(x)$.

Сформулювати правила вибору ефективної заміни змінної можна лише для певних класів функцій: раціональних, тригонометричних, ірраціональних.

Відмітимо, що важливо

- 1) здійснити підстановку $x = \varphi(t)$, в результаті чого $\int f(x)dx$ перетвориться на $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, причому останній може виявитись більш простим;
- 2) зробити заміну змінної $t = \varphi(x)$, що знову ж таки може привести до більш зручного інтегралу.

2. Наприклад, виконаємо заміну змінної $x = t^2, t \geq 0$, у невизначеному інтегралі

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 1}:$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 1} = \left| \begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0, \\ dx = 2t dt, \\ t = \sqrt{x}. \end{array} \right| = \int \frac{2t dt}{t + 1},$$

де після інтегрування треба підставити $t = \sqrt{x}$.

Уведення функції під знак диференціала

1. Лінійна підстановка. Розгляньмо спершу найпростіший випадок інтегрування введенням функції під знак диференціала, що дозволяє за відомим інтегралом. Якщо

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Тоді,

$$\begin{aligned}\int f(au + b)du &= \left| \begin{array}{l} d(au + b) = a du; \\ du = \frac{1}{a} d(au + b) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{a} \int f(au + b)d(au + b) = \frac{1}{a} F(au + b) + C.\end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned}\int \sin(2x + 3)dx &= \left| \begin{array}{l} d(2x + 3) = 2dx; \\ dx = \frac{1}{2} d(2x + 3) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(2x + 3)d(2x + 3) = -\frac{1}{2} \cos(2x + 3) + C.\end{aligned}$$

2. Загальний випадок. Метод інтегрування введенням під знак диференціала ґрунтується на формулі заміни змінної:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

у якій неявно використовують підстановку $u = \varphi(x)$:

$$\boxed{\begin{aligned}\int f(\varphi(x))d\varphi(x) &= \left| u = \varphi(x) \right| = \int f(u)du = \\ &= F(u) + C = F(\varphi(x)) + C.\end{aligned}}$$

Метод інтегрування частинами

1. У методі інтегрування частинами метою є перехід від «складного» інтеграла $\int u dv$ до «простого» інтеграла $\int v du$.

Теорема 9.4
(про
інтегрування
частинами).

Якщо функції u та v неперервно диференційовні в інтервалі $(a; b)$, то в цьому проміжку правдива *формула інтегрування частинами*:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

► Доведення теореми випливає з правила диференціювання добутку функцій:

$$d(uv) = u dv + v du,$$

і тому

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Інтегруючи обидві частини рівності й ураховуючи властивість інтеграла, дістаємо:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Завдяки неперервній диференційовності функцій u та v усі розглядувані інтеграли існують.

2. Розгляньмо основні типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами.

I. Інтеграли вигляду

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \cos bxdx, \int P_n(x) \sin bxdx,$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня n .

Щоб знайти інтеграли 1-го типу покладають

$$\boxed{u = P_n(x)}$$

і застосовують формулу інтегрування частинами n разів.

II. Інтеграли вигляду

$$\int P_n(x) \ln^k x dx, \int P_n(x) \arcsin^k ax dx, \int P_n(x) \arccos^k ax dx, \\ \int P_n(x) \arctg^k ax dx, \int P_n(x) \operatorname{arcctg}^k ax dx,$$

де $P_n(x)$ — многочлен степеня $n, k \in \mathbb{N}$.

Щоб знайти інтеграли 2-го типу, покладають за u функцію при $P_n(x)$:

$$\boxed{u = \ln^k x} \text{ чи } \boxed{u = \operatorname{arctg}^k ax}.$$

III. Інтеграли вигляду

Щоб знайти інтеграли типу

$$\int e^{ax} \cos bxdx, \int e^{ax} \sin bxdx$$

двічі інтегрують частинами, вибираючи

$$\boxed{u = e^{ax}}$$

і розв'язують лінійне рівняння щодо шуканого інтеграла.

1. Розгляньмо приклад інтегрування частинами в інтегралі 1-го типу:

$$\int (3x - 1)e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x - 1 \rightarrow du = 3dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= (3x - 1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{3}{2} e^{2x} dx = \frac{3x - 1}{2} e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x} + C.$$

$\int u dv = uv - \int v du$

2. Розгляньмо приклад n -кратного інтегрування частинами в інтегралі $\int u dv$.

$$\int (x^2 + 1) \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 1, du = 2x dx \\ dv = \sin 2x dx, v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x (x^2 + 1) + \int x \cos 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos 2x dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x (x^2 + 1) + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C.$$

3. Знайти інтегруванням частинами $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$.

$$I = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & \rightarrow du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin \beta x dx & \rightarrow v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx =$$

[Отримали та розв'язуємо рівняння щодо шуканого інтеграла.]

$$I = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I$$

$$I \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ll} u = e^{\alpha x} & \rightarrow du = \alpha e^{\alpha x} dx \\ dv = \cos \beta x dx & \rightarrow v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right| = \\
&= -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx \right) = \\
&= -\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x} \sin \beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I.
\end{aligned}$$

$$I = \frac{e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках:

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184.
<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf>

3). Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами / З.И. Гурова, С.Н. Каролинская, А.П. Осипова ; за ред. А.И. Кибзуна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 352 с. сторінки 18-23.

4) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>

5) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/Konspekt%20Dyferencialne%20ta%20integralne%20chyslenia.pdf>