Лекція 10. Методи інтегрування

10.1. Інтегрування тригонометричних виразів
10.2. Інтегрування ірраціональних виразів

Основними методами інтегрування тригонометричних виразів є безпосереднє інтегрування з використанням тригонометричних тотожностей і заміни змінної.

10.1. Інтегрування тригонометричних виразів

Універсальна тригонометрична підстановка

1. Позначимо через $R(u, v, w, \ldots)$ раціональну функцію щодо $u, v, w, \ldots$, тобто вираз, який одержано з величин $u, v, w, \ldots$, а також дійсних чисел за допомогою чотирьох арифметичних дій.

Розгляньмо нетабличний інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де підінтегральна функція є раціональною функцією від $\sin x$ та $\cos x$. Знайти його можна різними методами. Іноді буває досить перетворити підінтегральний вираз, використовуючи відомі тригонометричні формули, застосувати методи введення функції під знак диференціала, заміни змінної або інтегрування частинами.

2. Універсальна тригонометрична підстановка. Для обчислення інтегралів вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

існує загальна універсальна схема обчислення, яка ґрунтується на *універсальній тригонометричній підстановці*

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, x \in (-\pi;\pi).}$$

За допомогою цієї підстановки інтеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

перетворюють в інтеграл від раціональної функції змінної t, який завжди виражається в елементарних функціях.

Справді, нехай $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Виразімо $\sin x, \cos x$ та dx через t:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x &= 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \end{aligned}}$$

Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\frac{2dt}{t^2+1} = \int R_1(t)dt.$$

За допомогою універсальної підстановки зручно обчислювати інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

Приклад.

Знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x}$.

Застосуймо універсальну підстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{2dt}{t^2+2t+17} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+16} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{4} + C. \bullet$$

Окремі випадки підстановок

1. Універсальна підстановка інколи приводить до порівняно громіздких раціональних дробів. Тому буває зручнішим використовувати інші підстановки.

1) якщо підінтегральна функція непарна щодо $\sin x$, тобто

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку

$$\boxed{\cos x = t, x \in [0; \pi];}$$

2) якщо підінтегральна функція непарна щодо $\cos x$, тобто

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку

$$\boxed{\sin x = t, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];}$$

3) якщо підінтегральна функція парна щодо $\sin x$ та $\cos x$, тобто

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку

$$\boxed{\operatorname{tg} x = t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).}$$

Приклад

1) Знайти $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$.

[*Перевіряємо підінтегральну функцію на непарність за* $\sin x$.]

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \left| \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \right| =$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x) d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \int d(\cos x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

2) Знайти

$$\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\cos^4 x + \cos^2 x}\,dx = \left| \begin{aligned} &R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3 + (-\sin x)}{\cos^4 x + \cos^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^3 x + \sin x}{\cos^4 x + \cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x) \end{aligned} \right| =$$

$$= \left| \begin{aligned} &t = \cos x \\ &dt = -\sin x dx \\ &\sin^2 x = 1 - t^2 \end{aligned} \right| = \int \frac{t^2 - 2}{t^4 + t^2}\,dt =$$

$$= \left| \frac{t^2 - 2}{t^2(t^2 + 1)} = \frac{-2}{t^2} + \frac{3}{t^2 + 1} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{3}{t^2 + 1} - \frac{2}{t^2} \right) dt = 3 \operatorname{arctg} t + \frac{2}{t} + C = 3 \operatorname{arctg}(\cos x) + \frac{2}{\cos x} + C.$$

3) Знайти

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2} = \left| \begin{aligned} &R(-\cos x) = \frac{1}{(-\cos x)^2 + 2} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x + 2} = R(\cos x) \end{aligned} \right| =$$

$$= \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x + 3} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x \right) + C. \bullet$$

2. Спосіб знаходження інтегралів вигляду

$$\int \sin^m x \cos^n x dx.$$

залежить від парності чисел m та n.

I. Якщо хоча б одне з чисел m або n — непарне, то відокремлюють від непарного степеня один співмножник і виражають за допомогою формули

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

парний степінь, що залишився. Отже,

1) якщо $m = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, то підінтегральний вираз перетворюють так:

$$\boxed{\sin^{2k-1} x dx = \sin x (\sin x)^{2k-2} dx = -(1 - \cos^2 x)^{k-1} d(\cos x);}$$

2) якщо $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, то підінтегральний вираз перетворюють так:

$$\boxed{\cos^{2k-1} x dx = (1 - \sin^2 x)^{k-1} d(\sin x).}$$

II. Якщо ж m та n — парні числа, то степені понижують, переходячи до подвійного аргументу за допомогою формул:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Отже,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin^{2k} x \cos^{2l} x = \left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l, & \\ & k, l \in \mathbb{N}. \\ \sin^{2k} x \cos^{2k} x = \left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}\right)^k = \left(\dfrac{1 - \cos 4x}{8}\right)^k, & \end{array}}$$

Приклад

1) Знайти $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) =$$

$$= \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + C.$$

2) Знайти

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

Перетворення підінтегрального виразу

1. Щоб знайти інтеграли вигляду

$$\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx$$

використовують тригонометричні тотожності:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1,$$
$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

а саме:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}^n x &= \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^{n-2} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right); \\ \operatorname{ctg}^n x &= \operatorname{ctg}^{n-2} x \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{ctg}^{n-2} x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right). \end{aligned}}$$

Приклад

1) Знайти $\int \operatorname{ctg}^4 x dx = \int \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x dx = \left|\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1\right| =$

$$= \int \operatorname{ctg}^2 x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \operatorname{ctg}^2 x \frac{dx}{\sin^2 x} dx - \int \operatorname{ctg}^2 x dx =$$
$$= -\int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) - \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$
$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C.$$

2) Знайти $\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$

$$= \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg} x dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln\left|\cos x\right| + C.$$

2. Щоб знайти інтеграли

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx \ (m, n \in \mathbb{R}).$$

використовують формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x), \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x), \\ \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x). \end{aligned}}$$

Приклад

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x) dx =$$
$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

10.2. Інтегрування ірраціональних виразів

Основним методом інтегрування ірраціональних виразів є заміна змінної.

Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей

1. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \ldots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx,$$

де $m_1, n_1, \ldots, m_k, n_k \in \mathbb{Z}$, $R(\cdot)$ — раціональна функція, зводять до інтегралів від раціональних функцій підстановкою

$$\boxed{x = t^s,}$$

де s — найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$.

Приклад.

1) Знайти

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Оскільки спільний знаменник дробів $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{3}$ дорівнює $6,$ виконаймо заміну

$$x = t^6, dx = 6t^5 dt.$$

Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{matrix} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{(t^3+1)6t^5}{t^3-t^2}dt = 6\int \frac{t^6+t^3}{t-1}dt =$$

$$= 6\int \left(\frac{2}{t-1} + 2 + 2t + 2t^2 + t^3 + t^4 + t^5 \right) dt =$$

$$= 12\ln|t-1| + 12t + 6t^2 + 4t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 + t^6 + C =$$

$$= x + \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x} + 12\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C. \bullet$$

2. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m_k/n_k} \right) dx,$$

де $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k \in \mathbb{Z},$ зводять до інтегралів від раціональної функції підстановкою

$$\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,}$$

де s — найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$.

Приклад.

1) Знайти $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

Виконаймо заміну

$$\frac{1-x}{1+x}=t^2.$$

Тоді

$$\int\frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx=\left|\begin{array}{c}\dfrac{1-x}{1+x}=t^2, x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ dx=-\dfrac{4tdt}{(1+t^2)^2}, 1-x=\dfrac{2t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=-\int\frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\cdot\frac{t\cdot 4t}{(1+t^2)^2}dt=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

3. Інтеграли від ірраціональних функцій не завжди виражаються через елементарні функції. Приміром, інтеграли

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$
$$0<k<1,$$

не інтегруються в елементарних функціях.

Інтегрування квадратичних ірраціональностей

Розгляньмо, як знаходити інтеграл

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx.$$

Функцію вигляду $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$, де $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$; $R(\cdot)$ — раціональна функція від двох змінних, називають *квадратичною ірраціональністю*.

1. Інтеграл $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ обчислюють виділенням у чисельнику диференціала від підкореневого виразу і, при потребі, виділенням також повного квадрату під коренем.

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax+b)+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{M}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}}.$$

Останній інтеграл для $a > 0$ дорівнює «довгому логарифмові», а в разі $a < 0, b^2 - 4ac > 0,$— арксинусу.

Приклад.

Знайти 1) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+2x+2) = (2x+2)dx \\ 3x-1 = \frac{3}{2}(2x+2)-4 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 4\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) + C.$$

2. Інтеграл вигляду

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

зводять до інтеграла попереднього типу заміною

Приклади

Знайти 1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = \begin{vmatrix} x=\frac{1}{t}, t=\frac{1}{x}, \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{vmatrix} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = \arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \arcsin\frac{\frac{1}{x}-1}{\sqrt{2}} + C.$$

3. Інтеграли вигляду

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})dx$$

можна перетворити з допомогою *тригонометричних підстановок*:

1) $\boxed{x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$, для інтеграла $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$;

2) $\boxed{x = a\,\mathrm{tg}\,t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$, для інтеграла $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})dx$;

3) $\boxed{x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)}$, для інтеграла $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$.

Тригонометричні підстановки найефективніші в обчисленні визначених інтегралів, де не потрібно вертатись до старої змінної.

Приклади

Знайти $I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\operatorname{tg} t, dx = \dfrac{adt}{\cos^2 t} \\ a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t = \dfrac{a^2}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{adt}{a^4\operatorname{tg}^4 t \dfrac{a}{\cos t}\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}dt = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^4 t} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^4 t} - \frac{1}{a^4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C.$$

Виразімо $\sin t$ через x: $x = a\operatorname{tg} t \Rightarrow \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Тоді

$$I = -\frac{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x} + C.$$

4. Інтеграли $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx, \int \sqrt{a^2-x^2}dx$ можна також знаходити інтегруванням частинами.

Приклади

Знайти 1) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx.$

$$I = \int \sqrt{x^2+a^2}dx = \left| \begin{array}{lll} u = \sqrt{x^2+a^2} & \to & du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ dv = dx & \to & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}dx + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C.$$

<u>*Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках*</u>

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184. *https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf*

3) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf

4) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (I курс I семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алєксєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

https://docplayer.net/85539897-Diferencialne-ta-integralne-chislennya-funkciy-odniieyi-zminnoyi-konspekt-lekciy.html