

Лекція 11. Визначений інтеграл його геометричне застосування

- 11.1. Задача про площу плоскої фігури
- 11.2. Поняття визначеного інтеграла за відрізком
- 11.3. Умова інтегровності
- 11.4. Властивості визначеного інтеграла
- 11.5. Оцінки визначеного інтеграла. Теорема про середнє
- 11.6. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею
- 11.7. Формула Ньютона — Ляйбніца
- 11.8. Заміна змінної у визначеному інтегралі
- 11.9. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі
- 11.10. Обчислення площі плоскої фігури у прямокутних координатах

11.1. Задача про площу плоскої фігури

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано неперервну функцію $y = f(x) \geq 0$. Фігуру $aABb$, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox , $a < b$, і прямими $x = a, x = b$, називають **криволінійною трапецією** (рис. 11.1.1).

Знайдімо площу S цієї трапеції.

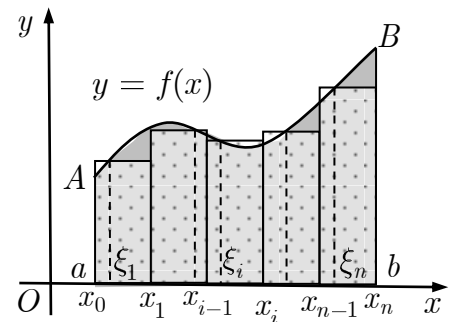


Рис. 11.1.1. Криволінійна трапеція

1. Розбиваємо відрізок $[a; b]$ на n частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Проводячи вертикальні прямі $x = x_i, i = \overline{1, n-1}$, поділяємо криволінійну трапецію на n ділянок площею $\Delta S_i, i = \overline{1, n}$.

2. На кожному відрізку вибираємо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, і будуємо прямокутник з основою $[x_{i-1}; x_i]$ заввишки $f(\xi_i), i = \overline{1, n}$.

Тоді

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i, i = \overline{1, n},$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n}$.

3. Одержуємо «східчасту» фігуру, утворену з n прямокутників, площа якої

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Тоді

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

4. Точність наближення зростатиме, якщо відрізок $[a; b]$ ділитимемо так, щоб кількість ділянок n збільшувалась, а їхні довжини $\Delta x_i, i = \overline{1, n}$, зменшувались.

Нехай $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$.

Площею криволінійної трапеції $aABb$ називають

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ця границя, якщо вона існує, не повинна залежати ані від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на ділянки $[x_{i-1}; x_i]$, ані від вибору точок ξ_i на них.

11.2. Поняття визначеного інтеграла за відрізком

Розгляньмо функцію

$$y = f(x), x \in [a; b], a < b,$$

і побудуймо для цієї функції визначений інтеграл за відрізком $[a; b]$, користуючись схемою.

1. Розбиваємо відрізок $[a; b]$ на n довільних відрізків точками:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i], i = \overline{1, n}$, вибираємо довільну точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, і обчислюємо значення функції $f(\xi_i)$.

3. Будуємо n -ту інтегральну суму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1}; x_i]$.

Означення 11.1
(визначеного
інтеграла).

Якщо існує скінченна границя послідовності S_n інтегральних сум, коли довжина найбільшого відрізка прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття відрізка на відрізка, ані від вибору точок на кожному відрізку, то цю границю називають *визначеним інтегралом за відрізком* $[a; b]$ від функції f і позначають

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Тоді функцію f називають *інтегрованою на відрізку* $[a; b]$. Числа a та b називають *нижньою та верхньою межами інтегрування*; функцію $f(x)$ — *підінтегральною функцією*; $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*; x — *змінною інтегрування*; $[a; b]$ — *проміжком інтегрування*.

Із задачі про площу криволінійної трапеції випливає, що *площу криволінійної трапеції*, обмеженої прямими $y = 0, x = a, x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$, дорівнює

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

З означення випливає

$$1) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt;$$

$$2) \int_a^a f(x) dx = 0.$$

11.3. Умова інтегровності

Теорема 11.1 (достатні умови інтегровності).

Функція f інтегровна на відрізку $[a; b]$, якщо виконано одну з умов:

- 1) функція f неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) функція f обмежена й неперервна на $[a; b]$, за винятком скінченної кількості точок;
- 3) функція f означена й монотонна на відрізку $[a; b]$.

Якщо змінити значення інтегрованої функції у скінченній кількості точок, то інтегровність її не порушиться і значення інтеграла при цьому не зміниться.

Інтегровна функція f може бути й не визначеною у скінченній кількості точок відрізка $[a; b]$.

11.4. Властивості визначеного інтеграла

Розгляньмо інтегровну на відрізку $[a; b]$ функцію f . Визначений інтеграл за відрізком $[a; b]$ від функції f має такі властивості.

1 (лінійність). Для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2 (адитивність). Для довільного $c \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3 (нормованість).

$$\int_a^b 1 dx = l([a; b]) = b - a, \quad a < b.$$

4 (орієнтованість).

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5 (збереження знаку підінтегральної функції). Якщо $f(x) \geq 0$ на відрізку $[a; b]$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6 (монотонність визначеного інтеграла). Якщо на відрізку $[a; b]$ $f(x) \leq g(x)$, $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

11.5. Оцінки визначеного інтеграла. Теорема про середнє

Теорема 11.2 (про оцінки визначеного інтеграла).

Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a; b]$, $a < b$.

1. Правдива нерівність

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2. Якщо $\forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq C$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq C(b - a).$$

3. Якщо m та M — відповідно найменше та найбільше значення функції f на відрізку $[a; b]$, $a < b$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Теорема 11.3
(про середнє значення функції).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c , що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Цю рівність називають *формулою середнього значення*, а величину $f(c)$ — *середнім значенням функції на відрізку* $[a; b]$. Вона означає, що площа криволінійної трапеції є площею прямокутника зі сторонами $b - a$ та $f(c)$ (рис 11.2.1).

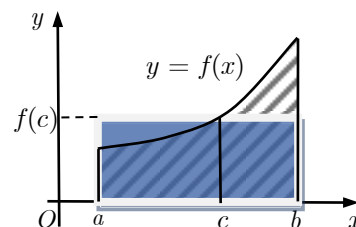


Рис. 11.2.1 Теорема про середнє значення функції

11.6. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею

1. Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a; b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a; x] \subset [a; b]$. Отже, визначений інтеграл

$$\int_a^x f(t)dt,$$

є функцію від x , означеною на відрізку $[a; b]$.

Функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

називають *визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею* (рис. 11.3.1).

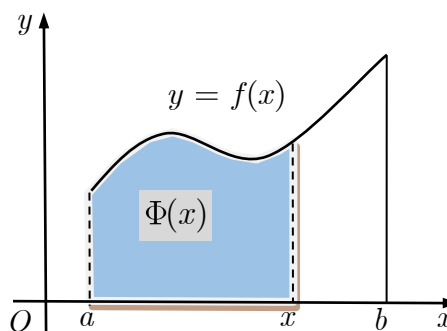


Рис. 11.3.1. Геометричний зміст інтеграла зі змінною верхньою межею

Теорема 11.4
(Бароу).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

є диференційовною в будь-якій точці $x \in [a;b]$ і правдива *формула Бароу*

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad x \in [a;b].$$

Доведення. Надаймо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0$ такий, що $x + \Delta x \in [a;b]$. Тоді

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

З адитивності визначеного інтеграла випливає, що

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Застосовуючи теорему про середнє значення, дістаємо

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

де $c \in [x; x + \Delta x]$.

Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $x + \Delta x \rightarrow x, c \rightarrow x$ і, завдяки неперервності функції f на відрізку $[a;b]$, $f(c) \rightarrow f(x)$. За означенням похідної

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (c \rightarrow x)}} f(c) = f(x). \quad \blacksquare$$

2. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

від неперервної функції f є первісною для підінтегральної функції f на відрізку $[a;b]$.

А отже, за означенням невизначеного інтеграла, маємо

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

11.7. Формула Ньютона -Лейбніца

1. Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f має на цьому відрізку первісну, приміром

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a;b].$$

Поставмо зворотну задачу: знаючи одну з первісних Φ функції f на відрізку $[a;b]$, обчислити визначений інтеграл від функції f на цьому відрізку.

Теорема 11.5

(теорема
Ньютона —
Лейбніца).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, а функція F - первісною на цьому відрізку, то виконується *формула Ньютона — Лейбніца*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доведення. Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f має на цьому відрізку первісну

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a;b].$$

Для всіх $x \in [a;b]$ правдива рівність

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C,$$

де C — довільна стала.

Для $x = a$ маємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a).$$

Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Покладаючи $x = b$, дістаємо

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

2. Позначаючи

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

формулу Ньютона — Лейбніца можна записати коротше як

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Приклади

$$1. \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

$$2. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \left| d(\ln x) = \frac{dx}{x} \right| = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_e^{e^2} = \\ = \ln |\ln e^2| - \ln |\ln e| = \ln 2.$$

11.8. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема 11.6
(про заміну
змінної).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервно диференційовна на відрізку $[t_1; t_2]$, причому

$$\varphi([t_1; t_2]) = [a; b] \text{ та } \varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b,$$

то виконується **формула заміни змінної**

$$\int_a^b f(x)dx = \left| x = \varphi(t) \right| = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Приклади

$$1. \int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left. \begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0; \\ dx = 2t dt, t = \sqrt{x}; \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 9 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{2t}{t+1} dt = 2 \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2(t - \ln|t+1|) \Big|_0^3 = 6 - 2 \ln 4;$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left. \begin{array}{l} x = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \\ dx = 2 \cos t dt \\ \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 2 & \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

11.9. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 11.7 (про інтегрування частинами).

Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a; b]$, то правдива *формула інтегрування частинами* у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад

1. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

$$\left[\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \right]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad \rightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin x dx \quad \rightarrow \quad v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -0 + 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \end{aligned}$$

11.10. Обчислення площі плоскої фігури у прямокутних координатах

1. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна й невід'ємна на відрізку $[a; b]$, $a < b$, (рис. 11.4.1). Тоді площу криволінійної трапеції $aABb$ знаходять за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

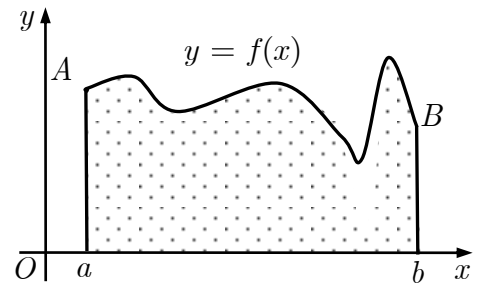


Рис. 11.4.1 Площа криволінійної трапеції

2. Нехай функція f від'ємна на відрізку $[a; b]$, $a < b$. Тоді крива $y = f(x)$

розташована під віссю Ox і $\int_a^b f(x) dx < 0$.

Площа криволінійної трапеції

$$S = - \int_a^b f(x) dx.$$

3. Нехай функція f змінює свій знак переходячи через точку $c \in (a; b)$, тобто частина криволінійної трапеції $aABb$ розташована над віссю Ox , а частина — під віссю Ox . Тоді площа всієї фігури

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

4. Нехай функції f та g неперервні та $f(x) \geq g(x)$ на відрізку $[a; b]$, $a < b$, причому криві $y = f(x)$ та $y = g(x)$ перетинаються в точках A та B (рис. 11.5.1). Тоді площу фігури, обмеженої цими лініями знаходять за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

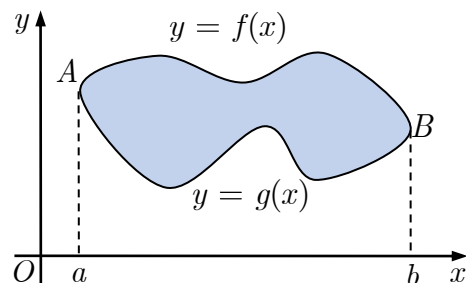


Рис. 11.5.1. Площа фігури

У загальному випадку має місце формула

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Приклади

Знайдімо площу фігури, обмеженої параболою

$$y = 4x - x^2 \text{ та } y = x^2 - 4x + 6.$$

Знайдімо абсциси точок A та B перетину заданих парабол (рис. 11.6.1). Для цього розв'язуємо рівняння

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= x^2 - 4x + 6; \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \Rightarrow x_A = 1, x_B = 3. \end{aligned}$$

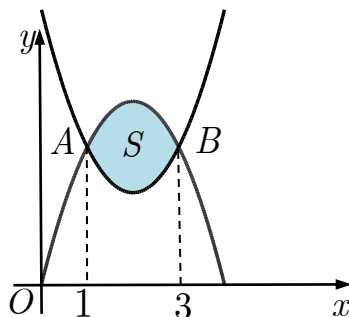


Рис. 11.6.1

Шукана площа

$$S = \int_1^3 [4x - x^2 - (x^2 - 4x + 6)]dx = \int_1^3 (8x - 2x^2 - 6)dx = \frac{8}{3}.$$

5. Нехай криву задано в параметричній формі рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

де функції $x(t), y(t)$ неперервні, причому $x(t)$ має неперервну похідну $x'(t)$ на відрізку $[t_1; t_2]$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою параметричними рівняннями, знаходять за формулою

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) dx(t) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt \right|.$$

Приклади

Обчислимо площу фігури, обмеженої еліпсом (рис. 11.7.1)

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi \quad (a, b > 0).$$

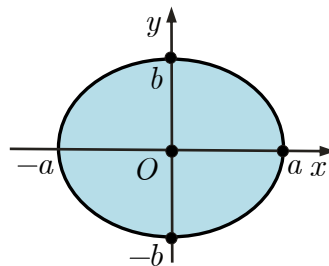


Рис. 11.7.1

Завдяки симетрії еліпса щодо координатних осей достатньо обчислити площу фігури, що розташована в I чверті, тобто

$$S = 4S_1.$$

Знайдімо нові межі інтегрування:

$$x = 0 \Rightarrow a \cos t = 0, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = \frac{\pi}{2};$$

$$x = a \Rightarrow a \cos t = a, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t = 0.$$

Отже,

$$S = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt =$$

$$= 4ab \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \pi ab.$$

6. У деяких випадках для обчислення площ плоских фігур користуються формулами, у яких інтегрують за змінною y . Тоді

$$x = g(y),$$

де функція $g(y)$ однозначна, неперервна й невід'ємна на відрізку $[c; d]$ осі Oy (рис. 11.8). Площа криволінійної трапеції, обмеженою прямими $y = c, y = d$, віссю Oy і кривою $x = g(y)$ дорівнює

$$S = \int_c^d g(y) dy.$$

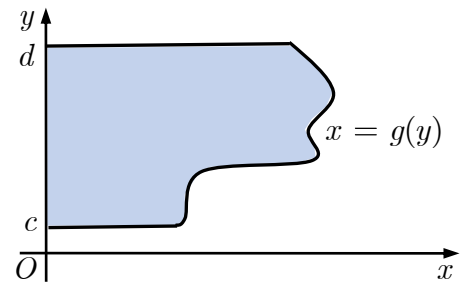


Рис. 11.8. Площа криволінійної трапеції

Приклад

Обчислимо площу фігури, обмеженої кривою $x = 2 - y - y^2$ (парабола) і віссю ординат

Межі інтегрування знайдемо як точки перетину параболи з віссю ординат: при $x = 0$ дістаємо рівняння $2 - y - y^2 = 0$, з якого знаходимо $y_1 = c = -2, y_2 = d = 1$. Отже, шукана площа

$$S = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2) dy = \frac{9}{2}.$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1). Вища математика: Навч. посібн. / Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с. сторінки 149-155.

2). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПП ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184.
<https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf>

3) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>

4) Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (I курс I семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.

<https://docplayer.net/85539897-Diferencialne-ta-integralne-chislennya-funkciy-odniieyi-zminnoyi-konspekt-lekciy.html>