Лекція 12. Економічний зміст визначеного інтегралу. Кумулятивні характеристики. Середнє значення

12.1. Визначений інтеграл та накопичені (кумулятивні) характеристики виробничої діяльності.
12.2. Визначений інтеграл та середні показники в економіці та бізнесі
12.3. Визначення закону зміни капіталу за темпом надходження інвестицій
12.4. Характеризація нерівномірності доходів населення
12.5. Неперервне нарахування відсотків та дисконтування у фінансових розрахунках

Розглянемо приклади безпосереднього застосування інтегрального числення у виробничих та управлінських задачах.

12.1 Визначений інтеграл та накопичені(кумулятивні) характеристики виробничої діяльності.

У багатьох випадках доводиться мати справу *зі змінною інтенсивністю* (продуктивністю) виробничих процесів. Використання визначених інтегралів дозволяє знаходити результати такої діяльності на різних проміжках часу, визначаючи *накопиченні за цей час* (кумулятивні) *характеристики* функціювання виробництва.

Приклад

Нехай продуктивність праці бригади робітників протягом 8 годинної виробничої зміни визначається функцією: $f(t) = 3t(8-t)$ (тис.грн/год.), яка відображає інтенсивність випуску продукції у її вартості на момент часу t, відлік якого починається з початком зміни. Обчислимо:

a) вартість продукції, випущеної протягом зміни
b) вартість продукції, випущеної протягом першої години зміни;
c) вартість продукції, випущеної протягом останньої години зміни;
d) вартість продукції, випущеної з другої по сьому години зміни.

Маємо

a)

$$Q_{[0,8]}=\int_0^8 3t(8-t)dt=\int_0^8(24t-3t^2)dt=24\int_0^8 tdt-3\int_0^8 t^2dt=$$

$$24\frac{t^2}{2}\Big|_0^8-3\frac{t^3}{3}\Big|_0^8=768-512=256\ (\text{тис.грн.})$$

b)

$$Q_{[0,1]}=\int_0^1 3t(8-t)dt=\int_0^1(24t-3t^2)dt=24\int_0^1 tdt-3\int_0^1 t^2dt=$$

$$24\frac{t^2}{2}\Big|_0^1-3\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=12-1=11\ (\text{тис.грн.})$$

c)

$$Q_{[7,8]}=\int_7^8 3t(8-t)dt=\int_7^8(24t-3t^2)dt=$$

$$24\int_7^8 tdt-3\int_7^8 t^2dt=24\frac{t^2}{2}\Big|_7^8-3\frac{t^3}{3}\Big|_7^8=180-169=11\ (\text{тис.грн.})$$

d)

$$Q_{[1,7]}=Q_{[0,8]}-Q_{[0,1]}-Q_{[7,8]}=256-11-11=234\,(\text{тис.грн.}).$$

Для відображення результатів виробничої діяльності підприємства часто використовується **виробнича функція Кобба-Дугласа**. Далі наведено один з варіантів такої функції.

Означення 12.1 **(функція Кобба-Дугласа)**	**Виробничою функцією Кобба-Дугласа,** яка включаю у себе фактор науково-технічного прогресу називається: $f(t)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}e^{\lambda t}$, де K – вартість виробничих фондів; L– вартість використаних трудових ресурсів; λ – інтенсивність технічного вдосконалення виробництва.

Розглядаючи таку функцію як модель інтенсивності виробництва, можна стверджувати, що об'єм виробництва на часовому інтервалі $[t_1, t_2]$ знаходиться як інтеграл $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Приклад.

Знайдемо обсяг виробництва для підприємства, у якого *функція Кобба-Дугласа* визначена формулою:

$$f(t) = 2(1+t)(0.5+t)e^{0.1t} \text{ (млн.грн/рік.)},$$

протягом перших двох років його діяльності. Маємо:

$$Q_{[0,2]} = \int_0^2 2(1+t)(0.5+t)e^{0.1t}dt = \int_0^2 (2t^2+3t+1)e^{0.1t}dt .$$

Скористаємось формулою інтегрування частинами.

$$u = 2t^2+3t+1, dv = e^{0.1t}dt,$$
$$du = 4t+3, \ v = 10e^{0.1t}.$$

Звідки

$$Q_{[0,2]} = \int_0^2 (2t^2+3t+1)e^{0.1t}dt = (2t^2+3t+1)10e^{0.1t} \Big|_0^2 - 10\int_0^2 (4t \ +3)e^{0.1t}dt = .$$

$$= 150e^{0.2} - 10 - 10\int_0^2 (4t \ +3)e^{0.1t}dt.$$

Обчислюємо останній інтеграл частинами і маємо остаточно:

$$Q_{[0,2]} = 1450e^{0.2} - 710 \approx 61 \, (\text{млн.грн.})$$

12.2. Визначений інтеграл та середні показники в економіці та бізнесі

Використання визначеного інтеграла дозволяє поширити поняття середнього значення із сукупності дискретних величин, наприклад, членів послідовності, на функції неперервного аргументу. Відповідно до властивостей визначеного інтеграла, середнім значенням неперервної функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ є величина:

$$f_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ .$$

Таким чином, якщо, наприклад, $P'(t)$ − ***інтенсивність надходження прибутків*** для деякого підприємства, то

$$P'_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P'(t)dt \text{ -}$$

середня інтенсивність надходження прибутків протягом часу від t_1 до t_2.

Аналогічно, якщо $C'(t)$ − ***інтенсивність витрат фірми***, то

$$C'_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} C'(t)dt$$

середня інтенсивність витрат протягом часу від t_1 до t_2.

А якщо, $I'(t)$ − ***інтенсивність надходження доходів***, то ***середня інтенсивність*** надходження доходів дорівнює:

$$\tilde{I}'_{[t_1,t_2]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} I'(t)dt \, .$$

Зазначимо, що

$$P'(t) = I'(t) - C'(t) \, .$$

Приклад.

Нехай для підприємства інтенсивності витрат та отримання доходів визначено наступними функціями:

$$I'(t) = t^2 + 12, \, C'(t) = 13t \, ,$$

де час вимірюється місяцями, а значення функції у тисячах гривень. Визначимо середній прибуток протягом року:

$$P'_{[0,12]} = I'_{[0,12]} - C'_{[0,12]} = \frac{1}{12}\int_0^{12} (t^2 + 12 - 13t)dt =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^{12} + 12t\Big|_0^{12} - \frac{13t^2}{2}\Big|_0^{12} \right) = -18 \text{ (тис.грн./міс.)}.$$

Тобто маємо середній збиток 18000 грн. на місяць.

Зауважимо, що маючи граничні показники доходу, витрат та прибутку, легко встановити зв'язки між функціями доходу, витрат та прибутку і середніми значеннями відповідних граничних показників:

$$R(t) = \int_0^t R'(t)dt = tR'_{[0,t]};$$

$$C(t) = \int_0^t C'(t)dt = tC'_{[0,t]};$$

$$P(t) = \int_0^t P'(t)dt = tP'_{[0,t]}.$$

Приклад.

Нехай гранична собівартість випуску *x* одиниць продукції виражається формулою

$$S'(x) = 5x + 120 \text{ (у.о.)}$$

Знайдемо витрати на випуск x одиниць, якщо відомо, що на випуск 100 одиниць продукції було витрачено 40000 у.о.

Маємо

$$S(x) = \int (5x + 120)dx = \frac{5}{2}x^2 + 120x + C.$$

При x=100 маємо

$$\frac{5}{2}100^2 + 120 \cdot 100 + C = 37000 + C = 40000.$$

Тобто C=3000. Тобто,

$$S(x) = \frac{5}{2}x^2 + 120x + 3000.$$

Приклад.

Граничний дохід від випуску x одиниць продукції визначається формулою

$$I'(x) = 120 - 5x.$$

Визначимо, якою формулою визначається дохід від випуску такої кількості продукції. Маємо:

$$I(x) = \int (120 - 5x)dx = 120x - \frac{5}{2}x^2 + C.$$

Зауважимо, що за відсутності продукції відсутній і дохід, тобто $I(0) = 0$, тобто C=0. Отже,

$$I(x) = 120x - \frac{5}{2}x^2.$$

Приклад.

Нехай граничний прибуток фірми визначається співвідношенням.

$$P'(x) = 30 - 0.05x,$$

де x − об'єм випуску продукції, у якості грошових одиниць − гривні. Знайдемо на скільки збільшиться прибуток, якщо об'єм випуску продукції збільшити з 80 до 120 одиниць. Маємо:

$$\Delta P = \int_{80}^{120} (30 - 0.05x)dx = 30x\Big|_{80}^{120} - 0.05\frac{x^2}{2}\Big|_{80}^{120} = 1200 - 200 = 1000 \text{ грн.}$$

12.3. Визначення закону зміни капіталу за темпом надходження інвестицій

Важливу роль визначенні інтеграли відіграють у питаннях аналізу фінансового стану підприємств.

Нехай витрати на виготовлення партії продукції, або реалізації певного об'єму робіт, зростають за законом $y = f(t)$,

Означення 12.2 (об'єм фактичного зв'язування обігових коштів)

Величина

$$C(t)=\int_0^T f(t)dt$$

називається об'ємом фактичного зв'язування обігових коштів на інтервалі часу $[0,T]$, якщо весь виробничий цикл займає час T^*, то умовним зв'язуванням обігових коштів називається величина $C=T^*\cdot C$, де C - витрати протягом всього виробничого циклу $(C=C(T^*))$, при цьому величину

$$K(t)=\frac{C(T\ )}{C}$$

називають коефіцієнтом готовності партії продукції.

Капітал підприємства являє собою його основні фонди, що включають у себе вартість майна та грошові ресурси. При фінансових вкладеннях у капітал важливим є поняття чистих інвестицій, тобто різниці між загальними інвестиціями(повним обсягом вкладених грошей) та амортизацією основних фондів (обсягом «здешевлення» основного капіталу). Якщо капітал підприємства $K(t)$ збільшується за одиницю часу на величину чистих інвестицій, то $i(t)$ є похідною від $K(t)$, а $K(t)$- первісна функції $i(t)$.

Приклад.

Нехай капітал підприємства перед початком йог інвестування склав $K(t)=300000$ г.о., амортизація (старіння) капіталу підпорядковується закону

$$K(t)=K(0)e^{-0.05t},$$

де t - час, що вимірюється у роках, інвестиції надходять темпом $\tilde{i}(t)=100000t$, де t - час, що вимірюється у роках. Знайдемо величину капіталу цієї фірми після двох років інвестування. Зауважимо спочатку, що амортизаційне зменшення капіталу визначено у даному випадку величиною

$$a(t)=K(0)-K(0)\cdot e^{-0.05t}.$$

Отже, швидкість амортизації

$$a'(t)=K(0)\cdot 0.05\cdot e^{-0.05t}=15000e^{-0.05t}.$$

Таким чином, чисті інвестиції складають

$$i(t)=100000t-15000e^{-0.05t}.$$

Капітал підприємства після двох років інвестицій складе

$$K(2) = 300000 + \int_0^2 \left(100000t - 15000e^{-0.05t}\right)dt =$$

$$= 300000 + 100000\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^2 + 300000e^{-0.05t}\Bigg|_0^2 =$$

$$= 200000 + 300000e^{-0.1} \approx 471500 \text{ у.е}$$

12.4 Характеризація нерівномірності доходів населення

Для опису економічного становища населення певної країни або відокремленої певним чином його частини використовують функцію $y = f(x)$, яка визначає частину людей, що отримує частку x сукупного доходу. Зрозуміло, що x змінюється від 0 до 1, так само як і y. Проте, часто їх виражають в процентом шляхом множення на 100%.

Зазначимо також, що традиційно саме населення при цьому ранжується від найбідніших до найбагатших за рівнем доходів. При ідеально рівномірному розподілі доходів ця функція набуває вигляду $y = x$, якщо ж має місце розбіжність у доходах різних верств населення, то функція $f(x)$ залишається зростаючою, проте для довільного $x \in [0,1]$, $0 \le f(x) \le x$. Графік такої функції *<u>називають</u>* **кривою Лоренца** (рис. 12.4.1)

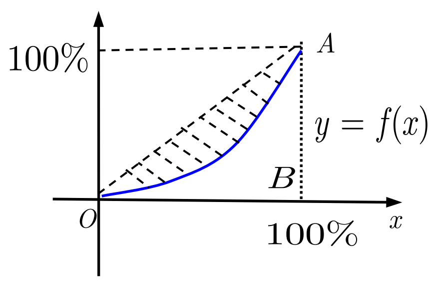

Рис. 12.4.1. Крива Лоренца

Зрозуміло, що чим менша площа заштрихованої частини, тим ближчий розподіл доходів до рівномірного. У якості показника нерівномірності обирають **коефіцієнт Джині**: ***відношення площі заштрихованої області до площі трикутника OAB.*** Для рівномірного розподілу доходів коефіцієнт Джині дорівнює 0, але теоретично він може досягати й 1.

Приклад.

Нехай $f(x)=1-(1-x)^{\frac{2}{3}}$. Знайдемо коефіцієнт Джині для такої функції. Як видно з малюнку, площа трикутника OAB дорівнює 1/2. Відповідно, площа заштрихованої частини є різницею між площею трикутника та площі під кривою Лоренца. Звідки маємо:

$$G=\frac{0.5-\int_0^1 f(x)dx}{0.5}=1-2\int_0^1(1-(1-x)^{\frac{2}{3}})dx=$$

$$=1-2\int_0^1 1dx+2\int_0^1(1-x)^{\frac{2}{3}}dx=-1+2\int_0^1(1-x)^{\frac{2}{3}}dx.$$

Для обчислення інтеграла зробимо заміну

$$\int_0^1(1-x)^{\frac{2}{3}}dx=\left|\begin{matrix}1-x=t^3, t\in[0;1], \\ dx=3t^2dt;\end{matrix}\quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 0\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 t^2(-3t^2)dt=3\int_0^1 t^4dt=3\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1=0.6$$

Звідки

$$G=-1+2\cdot 0.6=0.2.$$

Зауважимо, що офіційна оцінка коефіцієнта Джині для України у 2018 році склала 0.263, а найгіршим він був у 1995 році − 0.39.

12.5 Неперервне нарахування відсотків та дисконтування у фінансових розрахунках

Раніше було показано, що у випадку нарахування на грошовий депозит простих відсотків, його величина змінюється за правилом (для неперервного нарахування часу) :

$$S(t) = S_0(1 + it),$$

де S_0 − початкова сума депозиту, $i = \frac{p}{100}$, p − величина річних відсотків по депозиту, час обраховується у роках.

Аналогічно випадку нарахування складних відсотків та неперервного часу маємо:

$$S(t) = S_0 e^{it}.$$

Такі формули дають можливість як обчислювати величину капіталу у момент часу t, так і «відновлювати» його початкову величину при $t = 0$, виходячи з відомої величини у момент часу t. Ситуація ускладнюється у випадку наявності фінансового потоку, тобто виконання додаткових зарахувань та відрахувань протягом терміну зберігання депозиту.

При виконанні банківських операцій такі ситуації у більшості випадків виключені, але вони є типовими у інвестиційному бізнесі. Якщо, наприклад, інтенсивність платежів та відрахувань є функцією часу $P(t)$ на період T (в роках) дії інвестиції, то відсоткова ставка обраховується неперервно та має величину $i\left(i = \frac{r}{100}\right)$, r − річний відсоток. Тоді остаточна величина капіталу обраховується за формулою:

$$S(t) = \int_0^T P(t) e^{i(T-t)} dt.$$

Означення 12.3 (Дисконтування)	Дисконтуванням грошових потоків *називають* зведення вартості майбутніх (очікуваних) грошових платежів до даного моменту часу.

У результаті дисконтування знаходиться тимчасова вартість грошей, яка відіграє принципово важливу роль у фінансовому бізнесі внаслідок дії закону зменшення вартості грошей, який пов’язують з наступними обставинами:

- *грошові кошти можуть бути інвестовані у даний момент часу та принести дохід;*
- *гроші можуть втрачати частину своєї вартості внаслідок інфляції;*
- *гроші у майбутньому бути втрачені внаслідок різноманітних непередбачуваних обставин.*

Розгляньмо наступні прості приклади. Нехай відомо, що при початковому внеску P_0 та неперервній відсотковій ставці (час вимірюється у роках) і забезпечуються щорічні виплати (**ануїтет**) розміром P протягом T років. Визначимо значення P_0 за відомими значеннями i, P, T. У такому випадку маємо

$$P_0 = \int_0^T Pe^{it}dt, i = \frac{10\%}{100\%} = 0.1.$$

Приклад.

Визначити початковий внесок, який забезпечує щорічний дохід у 10000 г.о. протягом п'яти років за умови 10% річних. Маємо:

$$P_0 = \int_0^5 10000e^{-0.1t}dt = 10000 \cdot \frac{1}{(-0.1)} \cdot e^{-0.1t}\Big|_0^5 = 100000(1 - e^{-0.5}) \approx 39347 \text{ г.о.}$$

<u>*Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках*</u>

1). Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова ; за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с. сторінки 179-184. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/30396/1/MTU2.pdf

2) Курс высшей математики для экономических вузов в 2 ч./ Карасев Е.И., Аксютина З.И., Савельева Т.И. — М.: Высшая школа, 1982, — 294с.

3) Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf