Лекція 14. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування. Поняття про корисність

14.1. Правило домінування

Розв‘язання довільної матричної гри зводиться до розв‘язання стандартної задачі лінійного програмування. Отже розв‘язок можна знайти відомими методами лінійного програмування. При цьому, обсяг обчислень залежить від числа чистих стратегій гравців. Тому, будь-які прийоми попереднього аналізу гри, що дозволяють зменшувати розмір платіжної матриці, не погіршуючи розв‘язок, мають велике практичне значення.

Аналізуючи платіжну матрицю, можна побачити, що деякі чисті стратегії гравців не мають жодного внеску в оптимальні стратегії.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - довільна матриця $m \times n$.

Говорять, що k-ий рядок домінує l-ий рядок (стратегія A_k домінує стратегію A_l), якщо $a_{kj} \geq a_{lj}, \forall j = \overline{1,n}$.

Виграш гравця 1 при стратегії A_k буде більше, ніж при A_l, тому гравець 1 буде діяти розумно, якщо буде уникати домінованих стратегій. Таким чином, доміновані стратегії можна відкидати і це не впливає на оптимальний розв‘язок, тобто можна відкинути l-ий рядок.

Оскільки гравець 2 намагається мінімізувати програш, то домінувати буде стовпець з найменшими елементами.

Говорять, що r-ий стовпець домінує s-ий стовпець матриці A, якщо $a_{ir} \leq a_{is}, \forall i = \overline{1,m}$ (стратегія B_r домінує стратегію B_s). Доміновану стратегію B_s можна відкинути, це не вплине на результат гри.

14.2. Афінне правило

Теорема 14.1. Оптимальні змішані стратегії P^* і Q^* гравців 1 і 2 відповідно в матричній грі Γ_A з матрицею $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ з ціною гри v будуть оптимальними і в матричній грі з матрицею $\left(\lambda a_{ij} + \mu\right)_{m\times n}$, де $\lambda > 0, \mu$ - довільне число з ціною гри $v' = \lambda v + \mu$.

$\triangle$ За теоремою 13.3 (критерієм оптимальності) для оптимальної змішаної стратегії P^* гравця 1 і для довільної чистої стратегії B_j гравця 2

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge v \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{14.1}$$

Помножимо (14.1) на $\forall \lambda > 0$ і додамо $\mu \sum_{i=1}^{m} p_i^*$.

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij} p_i^* + \mu \sum_{i=1}^{m} p_i^* \ge \lambda v + \mu \sum_{i=1}^{m} p_i^* \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{14.2}$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$, то з (14.2) випливає

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\lambda a_{ij} + \mu\right) p_i^* \ge \lambda v + \mu \text{ або } \sum_{i=1}^{m} \left(\lambda a_{ij} + \mu\right) p_i^* \ge v', \quad j = \overline{1,n}.$$

Отже, P^* - оптимальна стратегія для гри з матрицею $\left(\lambda a_{ij} + \mu\right)_{m \times n}$.

Аналогічно для Q^*.▲

Теорема 14.1 дозволяє платіжну матрицю з від'ємними елементами перетворити в матрицю з додатними елементами.

14.3. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Нехай є гра Γ_A $m \times n$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $P^* = \left(p_1, \ldots, p_m\right), Q^* = \left(q_1, \ldots, q_n\right)$ - оптимальні змішані стратегії гравців 1 і 2. Стратегія P^* гравця 1 гарантує йому виграш не менше v, незалежно від вибору стратегії B_j гравця 2.

Тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge v, \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{14.3}$$

де $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \; p_i \ge 0, \; i = \overline{1,m}.$

Аналогічно, стратегія Q^* гравця 2 гарантує йому програш не більше v, незалежно від вибору стратегії A_i гравцем 1, тобто

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le v, \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{14.4}$$

де $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \ge 0, j = \overline{1,n}$.

Оскільки елементи платіжної матриці на основі теореми 18.3 завжди можна зробити додатними, то і ціна гри $v > 0$. Поділимо кожну нерівність (14.3), (14.4) на додатне число v і позначимо $\frac{p_i}{v} = x_i, \frac{q_j}{v} = y_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \; j = \overline{1,n} \;, \tag{14.5}$$

де

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{v}, \; x_i \ge 0, \; i = \overline{1,m} \;, \tag{14.6}$$

і

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \; i = \overline{1,m} \;, \tag{14.6}$$

де

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{v}, \; y_j \ge 0, \; j = \overline{1,n} \;, \tag{14.8}$$

Оскільки гравець 1 намагається максимізувати ціну гри v, то $\frac{1}{v}$ буде мінімізуватися, тому оптимальна стратегія гравця 1 визначається ЗЛП виду

$$Z\left(X\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min, \tag{14.9}$$

при обмеженнях (14.5), (14.6).

Оптимальна змішана стратегія гравця 2 визначиться розв‘язанням ЗЛП виду

$$F\left(Y\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max, \tag{14.10}$$

при обмеженнях (14.7), (14.8).

Одержали пару взаємно-двоїстих задач лінійного програмування. Кожна з задач має допустимий розв'язок: для задачі (14.9), (14.5), (14.6) достатньо покласти $x_1 = 1/\min\{a_{11},...,a_{1n}\}$, $x_2 = ... = x_n = 0$, для задачі (14.10), (14.7), (14.8) допустимим є нульовий вектор. Тому, за першою теоремою двоїстості існують оптимальні розв'язки $X^* = \left(x_1^*,...,x_m^*\right)$ і $Y^* = \left(y_1^*,...,y_n^*\right)$ цих задач, причому $Z\left(X^*\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_j^* = F\left(Y^*\right)$.

Розв'язавши пару двоїстих задач симплексним методом (або графічно для $i = 1,2$ або $j = 1,2$) визначаємо:

1) $v = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^*}$ або $v = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^*}$,

2) $p_i^* = \dfrac{x_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^*}$, $i = \overline{1,m}$ $\left(p_i^* = x_i^* v\right)$,

$q_j^* = \dfrac{y_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^*}$, $j = \overline{1,n}$ $\left(q_j^* = y_j^* v\right)$.

Таким чином, ми довели, що будь-яка матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.

14.4. Поняття про функцію корисності

Правомірність використання математичного сподівання виграшу в змішаному розширенні гри часто викликає сумніви. Коли гравці застосовують задані змішані стратегії, то виграш кожного є випадковою величиною з заданим законом розподілу. В теорії корисності таку величину називають *лотерею*. Формально вона задається сукупністю параметрів $L = \left(H_1,...,H_n; p_1,...,p_n\right)$, де виграш H_i виникає з ймовірністю p_i, $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Оцінка результату довільної гри за її математичним сподіванням передбачає, що лотереї $L_1 = (0;1)$, $L_2 = \left(5000, -5000; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і $L_3 = \left(-1, 10000; \frac{10000}{10001}, \frac{1}{10001}\right)$ еквівалентні. Але на справді, для багатьох людей це не так. Мало хто наважиться ризикнути зіграти в лотерею 2 і багато людей грають в лотереї подібні до 3.

Вивченням відношення людей до ризику займається *теорія корисності* .

Припустимо, що у особи (гравця) є відношення переваги на множині лотерей, тобто для будь-яких двох лотерей L_1 і L_2 вона може вказати, яке із співвідношень виконується (причому тільки одне) $L_1 \succ L_2$ (L_1 має перевагу над L_2), $L_2 \succ L_1$ або $L_1 \sim L_2$ (лотереї еквівалентні). Нехай лотереї задовольняють аксіомам:

1) Якщо $L_1 \succ L_2$ і $L_2 \succ L_3$, то $L_1 \succ L_3$.

2) Якщо $L_1 \sim L_2$ і $L_2 \sim L_3$, то $L_1 \sim L_3$.

3) Якщо $L_1 \sim L_2$ і $L_2 \succ L_3$, то $L_1 \succ L_3$.

4) Якщо $L_1 \succ L_2$ і $L_2 \sim L_3$, то $L_1 \succ L_3$.

5) Лотереї, яким відповідає однаковий розподіл ймовірностей еквівалентні.

Нехай є дві лотереї L_1 і L_2, $0 \le r \le 1$. Позначимо через $rL_1 + (1-r)L_2$ лотерею, в якій з ймовірністю r розігрується лотерея L_1 і з ймовірністю $1-r$ лотерея L_2.

Тоді для з аксіоми 5) випливає, що для довільних лотерей L_1, L_2 і L_3 і ймовірностей r, s виконується

$$rL_1 + (1-r)L_2 \sim (1-r)L_2 + rL_1$$

$$rL_1 + (1-r)\left(sL_2 + (1-s)L_3\right) \sim rL_1 + (1-r)sL_2 + (1-r)(1-s)L_3 .$$

6) Якщо $L_1 \sim L_2$ ($L_1 \succ L_2$), то для довільної лотереї L_3 і довільної ймовірності $r > 0$ виконується

$$rL_1 + (1-r)L_3 \sim rL_2 + (1-r)L_3 \quad \left(rL_1 + (1-r)L_3 \succ rL_2 + (1-r)L_3\right).$$

7) Якщо $L_1 \succ L_2 \succ L_3$, то знайдеться така ймовірність r , що $rL_1 + (1-r)L_3 \sim L_2$.

8) Якщо $H_1 > H_2$, то $(H_1;1) \succ (H_2;1)$.

Лема 14.1. Нехай на множині лотерей переваги особи задовольняють аксіомам 1) – 8) і $L_1 \succ L_2$ Тоді для довільних ймовірностей r і $s, r > s$ виконується співвідношення $rL_1 + (1-r)L_2 \succ sL_1 + (1-s)L_2$.

$\triangle$ За аксіомою 6) при $L_2 = L_3$ маємо

$$rL_1 + (1-r)L_2 \succ L_2 .$$

Запишемо $s = \alpha r, \alpha \in [0,1)$ Тоді з аксіом 5) і 6) випливає

$$rL_1+(1-r)L_2\sim \alpha\left(rL_1+(1-r)L_2\right)+(1-\alpha)\left(rL_1+(1-r)L_2\right)\succ$$
$$\succ \alpha\left(rL_1+(1-r)L_2\right)+(1-\alpha)L_2\sim$$
$$\sim \alpha rL_1+\left(\alpha(1-r)+(1-\alpha)\right)L_2\sim sL_1+(1-s)L_2.\blacktriangle$$

Теорема 14.2. Якщо виконуються аксіоми 1) – 8), то існує функція корисності $U(L)$, визначена на множині лотерей виду $(H_1,...,H_n;p_1,...,p_n)$, що задовольняє співвідношенням

1) Для будь-яких лотерей L_1 і L_2 $U(L_1)>U(L_2)\Leftrightarrow L_1\succ L_2$.

2) Для довільної лотереї $L:U(L)=\sum_{i=1}^{n}p_iu(H_i)$.

3) Функція $U(H;1)$ монотонно зростає по H.

Більше того, ця функція єдина з точністю до лінійного перетворення, тобто, якщо існує інша функція $V(L)$, що задовольняє тим же властивостям, то $\exists c>0$ і b такі, що $V(L)=cU(L)+b$.

$U(L)$ називається функцією очікуваної корисності (Неймана – Моргенштейна), $u(H)$ - елементарна функція корисності (Бернуллі).

Таким чином, для кожної особи існує монотонне перетворення функції виграшу, що дозволяє оцінювати довільну лотерею виходячи з математичного сподівання виграшу. Тобто, якщо в матричній грі взяти перетворену функцію виграшу $u(a_{ij})$, то випадковий результат при змішаних стратегіях P і Q можна оцінити математичним сподіванням

$$H_A(u)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u(a_{ij})p_iq_j.$$

Оскільки у кожного гравця своя функція корисності, тому гра з перетвореними матрицями виграшів може виявитись неантагоністичною.

Теорія очікуваної корисності відносно проста і універсальна, хоча інколи суперечить поведінці реальних людей.

Парадокс Алле (Моріс Алле – французький економіст, Нобелівський лауреат).

Пропонується можливість виграти 5 млн. франків, 1млн. франків, або не виграти нічого в лотереях з різними наборами ймовірностей.

Гравцю пропонують здійснити вибір між двома лотереями

$$L_1=(5,1,0;0,1,0),L_2=(5,1,0;0.1,0.89,0.01).$$

В результаті експерименту виявилось, що для більшості людей $L_1 \succ L_2$. Потім пропонується вибрати з лотерей

$$L_3 = (5, 1, 0; 0, 0.11, 0,89), L_4 = (5, 1, 0; 0.1, 0, 0.9).$$

Більшість робить вибір $L_4 \succ L_3$. Але такий вибір суперечить теорії очікуваної корисності.

$$\begin{cases} U(L_1) = u(1) > 0.1u(5) + 0.89u(1) + 0.01u(0) = U(L_2) \\ U(L_4) = 0.1u(5) + 0.9u(0) > 0.11u(1) + 0.89u(0) = U(L_3) \end{cases}$$

Додамо нерівності $0.1u(5) + u(1) + 0.9u(0) > 0.1u(5) + u(1) + 0.9u(0)$ і одержуємо суперечність.

Якщо елементарна корисність $u(x) = x$, то для лотереї $L_1 : U(L_1) = 1$ млн. (гарантований!), $L_2 : U(L_2) = 1,39$ млн., $L_3 : U(L_3) = 0,11$ млн., $L_4 : U(L_4) = 0,5$ млн. Тобто, у випадках L_2 і L_4 за додатковий 1% ризику втратити все, очікуваний прибуток збільшується на 390 тис. франків, але під час першого запропонованого вибору мало хто відважується ризикувати.

Нехай L деяка лотерея, $E(L)$ - математичне сподівання виграшу в лотереї.

Особа є

ризикофобом, якщо $\forall L, U(L) < U(E(L))$,

нейтральною до ризику, якщо $\forall L, U(L) = U(E(L))$ і

ризикофілом, якщо $\forall L, U(L) > U(E(L))$.

Якщо, приміром для ризикофоба нерівність переписати у вигляді $\sum_{i=1}^{n} p_i u(H_i) < u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i H_i\right)$, то бачимо, що це означення строго угнутої функції.

На рис. 14.1 зображені функції корисності для 1 – особи не схильної до ризику (ризикофоба), 2 – особи нейтральної до ризику, 3 – особи схильної до ризику (ризикофіла).

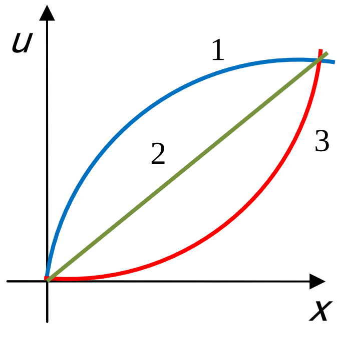

Рис. 14.1

Часто в якості функції корисності для особи, що не схильна до ризику, розглядають експоненціальну функцію $U\left(x\right)=1-e^{\frac{x}{r}}$, де x - грошова сума, якій потрібно приписати корисність, параметр r визначає схильність особи до ризику.