Лекція 13. Елементи теорії ігор.

13.1. Поняття про теорію ігор

В практичній діяльності часто доводиться розглядати явища і ситуації, в яких беруть участь 2 і більше сторін, що мають різні інтереси і володіють можливостями застосувати для своїх цілей різноманітні дії. Такі явища і ситуації називаються *конфліктними* або *конфліктами*.

Типовий конфлікти має три основні складові:

1) зацікавлені сторони,

2) можливі дії сторін,

3) інтереси сторін.

Необхідність вивчення і аналізу конфліктів, що представляються у вигляді спрощених математичних моделей (ігор) викликала появу спеціального розділу математики – *теорії ігор*.

Тобто, теорія ігор розробляє рекомендації щодо прийняття рішень в умовах конфліктної ситуації.

Основні поняття теорії ігор.

1. Зацікавлені сторони називаються *гравцями*.

2. Будь-яка можлива дія для гравця (в рамках заданих правил гри) називається його *стратегією*.

3. В умовах конфлікту кожен гравець вибирає свою стратегію, в результаті чого виникає набір стратегій, що називається *ситуацією*.

4. Зацікавленість гравців в ситуації проявляється в тому, що кожному гравцеві в кожній ситуації приписують число – виграш, що виражає ступінь задоволення його інтересів.

Реальні конфліктні ситуації приводять до різних типів ігор.

1. В залежності від кількості гравців n: парні $n = 2$ (найбільш вивчений клас) і множинні $n > 2$.

2. За кількістю стратегій ігри поділяють на скінченні і нескінченні.

3. За характером взаємовідносин між гравцями – безкоаліційні (гравці не мають права вступати в угоди), коаліційні (гравці можуть вступати в коаліції) і кооперативні (коаліції визначені наперед і обов‘язкові).

4. За характером виграшів – з нульовою сумою (капітал не змінюється, а перерозподіляється між гравцями) і ігри з ненульовою сумою.

Гра двох гравців з нульовою сумою називається антагоністичною.

5. За типом функції виграшу ігри поділяються на матричні, біматричні, неперервні, опуклі, сепарабельні тощо.

13.2. Матричні ігри

Антагоністичною грою називається трійка $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$, де X, Y непорожні множини і $H : X \times Y \to \mathbb{R}$.

X і Y - стратегії гравців 1 і 2 в грі Γ, елементи добутку $X \times Y$ (пари (x, y), де $x \in X, y \in Y$) – ситуації в ній, а H - функція виграшу гравця 1, а також функція виграшу самої гри Γ.

Матричною називається антагоністична гра, в якій обидва гравці мають скінченну кількість стратегій.

Для такої гри можна скласти таблицю, в якій рядки відповідають стратегіям першого гравця, стовпці – стратегіям другого, а клітини на перетині рядків і стовпців відповідають ситуаціям гри.

Приклад 13.1. Кожен з двох гравців 1 і 2 одночасно і не залежно від іншого записує на аркуші довільне число. Якщо числа однієї парності, то 1 одержує від 2 1 грн., якщо різної, то 1 платить 1 грн. гравцю 2.

У гравця 1 є дві стратегії :

A_1 - записати парне число, A_2 - записати непарне число.

У гравця 2 також дві:

B_1- записати парне число, B_2 - записати непарне число.

Стратегії гравців		2	
		B_1	B_2
1	A_1	1	-1
	A_2	-1	1

Таким чином, умови гри визначаються матрицею 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям гравця 1, а стовпці – стратегіям гравця 2.

Розглянемо гру, в якій беруть участь два гравці, кожен з яких має скінченну кількість стратегій. Нехай гравець 1 має m стратегій $A_1, \ldots, A_m$, а гравець 2 - n стратегій $B_1, \ldots, B_n$.

Припустимо, що гравець 1 вибрав стратегію A_i , а 2 - стратегію B_j. Вважаємо, що вибір гравцями стратегій A_i та B_j однозначно визначає результат гри – виграш a_{ij} гравця 1 і виграш b_{ij} гравця 2 , причому

$$b_{ij} = -a_{ij}.$$

Від‘ємний виграш на побутовій мові зазвичай називають програшем.

Оскільки виграш одного гравця дорівнює виграшу іншого з протилежним знаком, то при аналізі такої гри розглядають виграш тільки одного з гравців, нехай це гравець 1. Якщо відомі всі значення a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, то їх зручно записувати у вигляді таблиці

	B_1	$\cdots$	B_n
A_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}

або у вигляді матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Одержана матриця $m \times n$ називається *матрицею гри* або *платіжною матрицею*. Матрична гра повністю визначається своєю платіжною матрицею A, тому будемо позначати її Γ_A .

13.3. Ситуація рівноваги

Основним постулатом теорії ігор в нормальній формі вважається *постулат економічної раціональності*: інтереси кожного гравця цілком і повністю описуються прагненням максимізувати свою функцію виграшу.

Кожен гравець обирає для себе найкращу стратегію. При цьому перший гравець намагається вибрати стратегію, яка забезпечує йому максимальний виграш, тоді другий гравець обирає стратегію, що приводить його до мінімального програшу.

Тому, для гравця 1 в кожному рядку шукаємо найменший елемент

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \ \ i = \overline{1,m}.$$

Записуємо справа додатковим стовпцем:

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_m \end{matrix}.$$

Серед чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ вибираємо максимальне

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

тобто

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Якщо гравець 1 дотримується описаної стратегії, то при довільній поведінці гравця 2 гравцю 1 гарантовано виграш, не менше α.

Число α називається *нижньою ціною гри* або *максиміном*. Принцип побудови стратегії гравця 1, що оснований на максимізації мінімальних виграшів називається *принципом максиміна*, A_{i^*} - максимінна стратегія для 1.

Для гравця 2 в кожному стовпці матриці A шукаємо

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Числа $\beta_1,...,\beta_n$ приписуємо як нижній рядок.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \alpha_m \\ \hline \beta_1 & \dots & \beta_n & \end{array}$$

Серед чисел $\beta_1,...,\beta_n$ вибираємо мінімальне

$$\beta = \min_j \beta_j,$$

тобто

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Якщо гравець 2 дотримується вказаної стратегії, то при довільній поведінці гравця 1 для гравця 2 гарантовано програш, не більший β.

Число β називається *верхньою ціною гри* або *мінімаксом*, B_{j^*} - мінімаксна стратегія.

Теорема 13.1. В матричній грі нижня ціна гри не перевищує верхню ціну гри, тобто

$$\alpha \le \beta.$$

$\triangle$ За означенням $\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij}, \ \beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij} \ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, отже

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \le \max_i a_{ij} = \beta_j \Rightarrow \alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j, \quad \forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Тому $\alpha \le \beta$.▲

Якщо $\alpha = \beta$, тобто $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$, то ситуація $\left(i^*, j^*\right)$ є рівноважною і не один з гравців не зацікавлений її порушувати.

Означення 13.1. В матричній грі ситуація $\left(i^*, j^*\right)$ називається *ситуацією рівноваги або сідловою* точкою, якщо $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то v називається *чистою ціною гри*, стратегії A_{i^*} та B_{j^*} називаються *оптимальними чистими стратегіями*, а елемент $a_{i^*j^*}$ матриці A, що стоїть на перетині i^*-го рядка і j^*-го стовпця називається *сідловим елементом (сідловою точкою)*.

Оптимальні стратегії розуміють в наступному сенсі: при багаторазовому повторенні гри відмова від обраної стратегії будь-яким з гравців зменшує його шанси на виграш (збільшує шанси на програш).

Сукупність $\left(A_{i^*}, B_{j^*}, v\right)$ називається *розв'язком матричної гри* Γ_A *в чистих стратегіях*.

Більш типовим є випадок $\alpha < \beta$, матрична гра сідловок точки не має. Запропонований вибір стратегій до ситуації рівноваги не призводить.

Приклад 13.1.

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1, \beta = 1.$$

$\alpha \neq \beta$, тобто гра не має сідлової точки і розв'язку в чистих стратегіях.

Виникає питання, як розподілити між гравцями $\beta - \alpha$ (в прикладі $\beta - \alpha = 2$)?

13.4. Поняття про змішані стратегії

Якщо гра не має сідлової точки, то виникає питання про розподіл частини виграшу, а саме $\beta - \alpha$. Попередні побудови відповіді не дають, тому механізм, що забезпечує одержання кожним з гравців максимальної долі різниці слід шукати в розширенні стратегічних можливостей.

Гравцям стає важливо, щоб супротивник не вгадав, яку стратегію він буде застосовувати. Для здійснення цього плану гравцям потрібно користуватись, так званими, змішаними стратегіями.

Розглянемо довільну гру Γ_A, що задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Випадкова величина, значеннями якої є стратегії гравця називається його *змішаною стратегією*.

Змішана стратегія – це схема випадкового вибору чистої стратегії гравця.

Отже, змішана стратегія першого (другого) гравця гри Γ_A $m \times n$ може бути задана вектором

$$P = \left(p_1, \ldots, p_m\right), \, p_i \geq 0, \, i = \overline{1, m}, \, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

$$\left(Q=\left(q_1,\ldots,q_n\right),\ q_j\ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n}q_j=1\right).$$

Вектор P (Q) означає ймовірність застосування i-ої чистої стратегії першим гравцем (j-ої чистої стратегії другим гравцем).

Зауваження 13.1. Кожна чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії, приміром, чиста стратегія A_i першого гравця є змішаною з

$P_i = (0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)$, $p_i=1,\ p_k=0,\ k\ne i,\ k=\overline{1,m}$,

а B_j другого гравця з

$Q_j = (0,\ldots,0,\underset{j}{1},0,\ldots,0)$, $q_j=1,\ q_l=0,\ l\ne j,\ l=\overline{1,n}$.

Оскільки, для збереження секретності кожен з гравців обирає свої стратегії випадково і незалежно від іншого гравця, гра має випадковий характер і випадковою стає величина виграшу (програшу).

Кожна звична в чистих стратегіях ситуація $\left(A_i,B_j\right)$ є випадковою подією і, в силу незалежності P і Q реалізується з ймовірністю p_iq_j. В цьому випадку виграш гравця 1 дорівнює a_{ij}. Таким чином, середня величина виграшу – математичне сподівання – є функцією від змішаних стратегій (P,Q):

$$H_A(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j .$$

Функція $H_A(P,Q)$ називається *платіжною функцією гри* Γ_A з $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Означення 13.2. Стратегії $P^*=\left(p_1^*,\ldots,p_m^*\right)$ і $Q^*=\left(q_1^*,\ldots,q_n^*\right)$ називаються оптимальними змішаними стратегіями гравців 1 і 2 відповідно, якщо виконано умову

$$H_A\left(P,Q^*\right)\le H_A\left(P^*,Q^*\right)\le H_A\left(P^*,Q\right) \qquad (13.1)$$

Нерівність $H_A\left(P,Q^*\right)\le H_A\left(P^*,Q^*\right)$ означає, що відхилення гравця 1 від оптимальної стратегії P^*, за умови, що гравець 2 притримується своєї оптимальної стратегії Q^* приводить до того, що виграш гравця 1 може тільки зменшитися.

Нерівність $H_A\left(P^*,Q^*\right)\le H_A\left(P^*,Q\right)$ - відхилення гравця 2 від Q^*, за умови, що 1 притримується стратегії P^*, призводить до збільшення виграшу гравця 1 і зменшенню виграшу гравця 2.

Отже, умова оптимальності

$$\max_P \min_Q H_A\left(P,Q\right)=H_A\left(P^*,Q^*\right)=\min_Q \max_P H_A\left(P,Q\right).$$

Величина $H_A\left(P^*,Q^*\right)=v$ називається *ціною гри*. Сукупність $\left(P^*,Q^*,v\right)$ називається розв‘язком матричної гри Γ_A.

Приклад 13.2. Для прикладу 13.1 з матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

знайти змішані стратегії.

Сідлової точки немає $\alpha=-1,\beta=1$.

$P=\left(p,1-p\right), Q=\left(q,1-q\right)$.

$H_A\left(P,Q\right)=1\cdot pq+\left(-1\right)p\left(1-q\right)+\left(-1\right)\left(1-p\right)q+1\cdot\left(1-p\right)\left(1-q\right)=$

$=4pq-2p-2q+1=\left(2p-1\right)\left(2q-1\right)=4\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(q-\frac{1}{2}\right)$.

$$P^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),Q^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),v=0.$$

На рис. 13.1 побудована поверхня, що описується функцією

$$h\left(p,q\right)=4pq-2p-2q+1=\left(2p-1\right)\left(2q-1\right).$$

Точка $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ є сідловою точкою цієї поверхні.

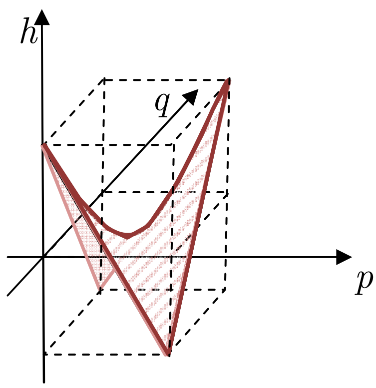

Рис.13.1

13.5. Оптимальність змішаних стратегій

Теорема 13.2. (*Дж. фон Нейман*)

Для будь-якої матричної гри Γ_A з довільною матрицею A

$$\max_P \min_Q H_A(P,Q) = \min_Q \max_P H_A(P,Q)$$

і існує хоча б одна точка (P^*,Q^*), для якої

$$H_A(P^*,Q^*) = \max_P \min_Q H_A(P,Q) = \min_Q \max_P H_A(P,Q).$$

Тобто будь-яка матрична гра має розв‘язок у змішаних стратегіях.

Типові випадки, коли застосовуються змішані стратегії:

1) Гра повторюється багато разів. В цьому випадку при великій кількості повторень середній виграш першого гравця, якщо він використовує оптимальну змішану стратегію, буде близьким до ціни гри або буде перевищувати його.

2) Змішана стратегія реалізується у вигляді «фізичної» суміші чистих стратегій.

Приміром, деяка країна (гравець 1) використовує 3 типи винищувачів для боротьби з літаками супротивниками (гравця 2). Якщо винищувач типу i першого гравця зустрічає літак j другого гравця, то він перемагає з ймовірністю a_{ij}. Змішана стратегія $P^* = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ першого гравця може бути реалізована у вигляді парку винищувачів з пропорціями 2:1:1.

3) Змішані стратегії можна застосовувати при одноразовому повторенні гри, коли гравець діє в умовах ризику, при цьому необхідно виграші замінити на їх «корисності», що враховують відношення гравця до ризику.

13.6 . Критерій оптимальності змішаних стратегій

Оптимальні стратегії $P^* = (p_1^*,...,p_m^*)$ і $Q^* = (q_1^*,...,q_n^*)$ гравців задовольняють умову

$$H_A(P,Q^*) \le H_A(P^*,Q^*) \le H_A(P^*,Q). \qquad (13.2)$$

Як перевірити, що (P^*,Q^*,v) є розв‘язком гри?

Потрібно перевірити (13.2) для будь-яких змішаних стратегій P і Q, серед яких є і P^*,Q^*. Але змішаних стратегій безліч, в такому випадку (13.2) перевірити неможливо.

Теорема 13.3. (*Критерій оптимальності змішаних стратегій*)

Для того, щоб змішані стратегії $P^* = (p_1^*,...,p_m^*)$ і $Q^* = (q_1^*,...,q_n^*)$ були оптимальними необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge v, \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (13.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v, \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{13.4}$$

$\triangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $P^* = \left(p_1^*,...,p_m^*\right)$ і $Q^* = \left(q_1^*,...,q_n^*\right)$ оптимальні, отже

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \le v \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j . \tag{13.5}$$

Візьмемо $Q_j = \left(q_1,..,q_n\right) = \left(0,...,0,\underset{j}{1},0,...,0\right)$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge v \Rightarrow P^* \quad \text{задовольняє} \quad (13.3).$$

Аналогічно для Q^*.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай виконуються нерівності (13.3), (13.4). Покажемо, що P^* і Q^* оптимальні.

Нехай $Q_j = \left(q_1,..,q_n\right)$ довільний, тоді

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} q_j v = v \sum_{j=1}^{n} q_j = v, \text{ тобто}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j \ge v \Rightarrow P^*, Q^* \text{ - оптимальні. } \blacktriangle$$

Висновок.

Якщо гравець 1 застосовує оптимальну стратегію P^*, а гравець 2 - довільну чисту стратегію B_j, виграш гравця 1 буде не менше ціни гри v.

Якщо гравець 2 застосовує стратегію Q^*, а гравець 1 - довільну чисту стратегію A_i, то програш гравця 2 буде не більше v.

Чисті стратегії гравця, що входять в його оптимальну змішану стратегію з ймовірностями, відмінними від нуля називаються *активними стратегіями* гравця.

Теорема 13.4. (*про активні стратегії*)
Якщо один з гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри v незалежно від того, яку стратегію застосовує другий гравець, якщо він не виходить за межі своїх активних стратегій.

$\triangle$ Нехай для гри Γ_A з матрицею $A_{m\times n}$ маємо оптимальні стратегії P^* для гравця 1 і Q^* для гравця 2, v - ціна гри.

При цьому гравець 1 має r активних стратегій, а гравець 2 - k активних стратегій.

Нехай

$$P^* = \left(p_1^*,...,p_r^*,0,...,0\right), \quad Q^* = \left(q_1^*,...,q_k^*,0,...,0\right), \sum_{i=1}^{r} p_i^* = 1, \sum_{j=1}^{k} q_j^* = 1.$$

Припустимо гравець 1 притримується своєї оптимальної стратегії P^*, а гравець 2 - чистої, тоді

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq v, \left(j = \overline{1,k}\right). \tag{13.6}$$

Якщо використовуються оптимальні стратегії, то

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} p_i^* q_j^* = v \Rightarrow$$

$$v = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* q_j^* = \sum_{j=1}^{k} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* \geq \sum_{j=1}^{k} q_j^* v = v. \tag{13.7}$$

Рівність (13.7) виконується тільки, якщо (13.6) перетворюються в рівності

$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* = v, \left(j = \overline{1,k}\right) \Rightarrow \forall Q = \left(q_1,...,q_k,0,...,0\right)$ виконується умова

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} p_i^* q_j = v. \blacktriangle$$

Таким чином,

$$v = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = \max_{P} \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i = \min_{Q} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*.$$

13.7. Методи розв‘язання матричних ігор.

1. $2 \times n$ ігри.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_n \end{pmatrix}$ - платіжна матриця $2 \times n$ гри.

Тоді ціна гри і оптимальне значення $P^* = \left(p^*, 1 - p^*\right)$ для гравця 1 знаходять як розв‘язок рівняння

$$v = \min_{1 \leq j \leq n} \left(a_{1j} p^* + a_{2j}\left(1 - p^*\right)\right) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_{1 \leq j \leq n} \left(a_{1j} p + a_{2j}\left(1 - p\right)\right).$$

Розв‘яжемо задачу графоаналітичним способом.

Припустимо, що гравець 1 вибрав змішану стратегію $P = \left(p, 1 - p\right)$, а гравець 2 j-у чисту стратегію $j = \overline{1,n}$. Тоді середній виграш гравця 1 в ситуації $\left\{P, j\right\}$ дорівнює:

(j): $w_j = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$.

На площині (p,w) рівняння (j) описує пряму. Отже кожній чистій стратегії гравця 2 на цій площині відповідає своя пряма. Будуємо всі прямі (рис.13.2)

$$w_j = (a_{1j} - a_{2j})p + a_{2j}, \quad j = \overline{1,n}.$$

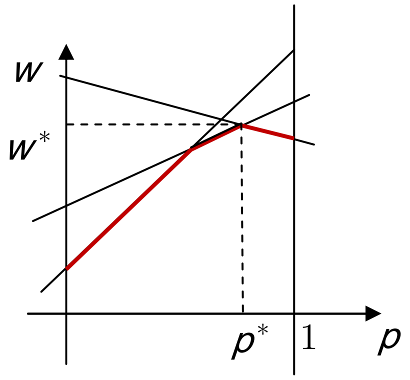

Рис. 13.2

Графіком функції

$$\min_{1 \le j \le n} w_j = \min_{1 \le j \le n} \left(a_{1j}p + a_{2j}(1-p)\right)$$

є нижня обвідна сукупності прямих $w_j, j = \overline{1,n}$. Точка (p^*, v), де

$v = w^* = \max_{0 \le p \le 1} \min_{1 \le j \le n} w_j$

визначає ціну гри v і оптимальну стратегію гравця 1: $P^* = (p^*, 1-p^*)$.

Для прикладу 13.1 (рис.13.3):

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$w_1 = p - (1-p) = 2p - 1;$

$w_2 = -p + (1-p) = 1 - 2p;$

$v = 0, p^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

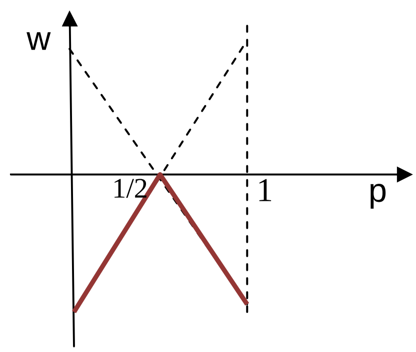

Рис. 13.3

Як знайти оптимальну змішану стратегію гравця 2?
Розглянемо випадки:

I. Нижня обвідна має 1 найвищу точку (p^*, w^*).

1) Якщо $p^* = 0$ (оптимальна змішана стратегія – чиста стратегія A_2), то гравцю 2 варто застосовувати чисту стратегію, що відповідає номеру прямої, що проходить через точку $(0, w^*)$ і має найбільший від'ємний нахил (рис.13.4).

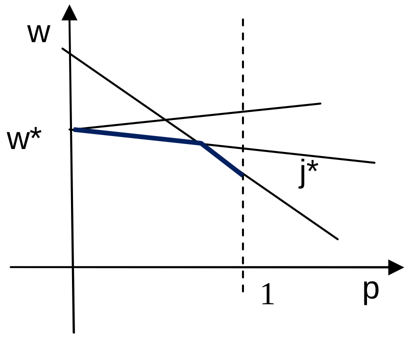

Рис. 13.4

2) Якщо $p^* = 1$ (оптимальна змішана стратегія – чиста стратегія A_1), то оптимальною для гравця 2 є чиста стратегія, що відповідає номеру прямої, що проходить через точку $(1, w^*)$ і має найменьший додатний нахил (рис.13.5).

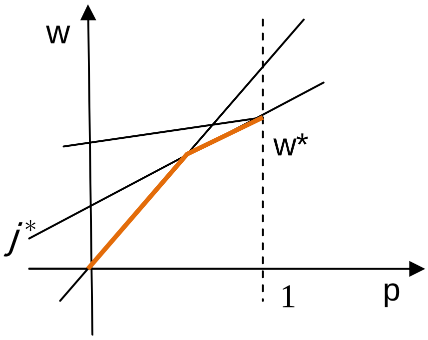

Рис. 13.5

3) Якщо $0 < p^* < 1$, то в найвищий точці нижньої обвідної перетинаються принаймні 2 прямі: (k) має додатний нахил, (l) - від'ємний (рис.13.6) і оптимальну змішану стратегію гравця 2 можна одержати, якщо покласти

$q_k = q, q_l = 1 - q, q_j = 0, j \neq k, l,$

де q - розв'язок рівняння

$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q).$

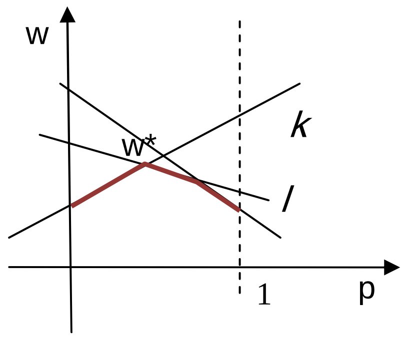

Рис.13.6

II. Нижня обвідна містить горизонтальну дільницю, що відповідає чистій стратегії j^* гравця 2 і є оптимальною для нього (рис. 13.7).

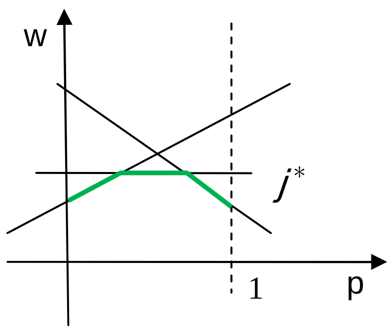

Рис.13.7

2. $m \times 2$ ігри.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$ - платіжна матриця $m \times 2$ гри.

Нехай $Q = (q, 1-q)$ - довільна змішана стратегія гравця 2.

Якщо гравець 1 обирає i-у чисту стратегію $i = \overline{1,m}$, то середній виграш гравця 2 в ситуації (i, Q) дорівнює:

(i): $w_i = a_{i1}q + a_{i2}(1-q), i = \overline{1,m}.$

Графіком функції $\max\limits_{1 \le i \le m} w_i = \max\limits_{1 \le i \le m} \left(a_{i1}q + a_{i2}(1-q)\right)$ є верхня обвідна сукупності прямих $w_i, i = \overline{1,m}$, що відповідають чистим стратегіям гравця 1 (рис.13.8). Абсциса нижньої точки q^*, а $w^* = v$ - ціна гри.

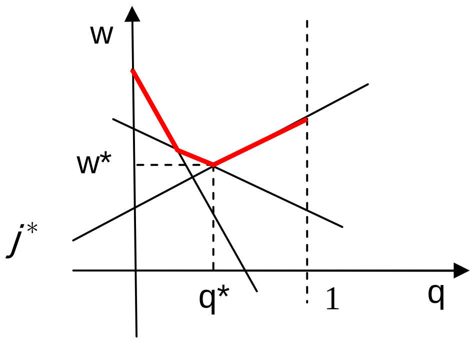

Рис. 13.8