Лекція 12. Робастна оптимізація в задачах лінійного програмування

12.1. Поняття про робастну оптимізацію.

В багатьох прикладних задачах оптимізації параметри задач вважаються точно відомими. Однак це рідко відбувається на практиці. Зазвичай реальні дані мають невизначеності через їх випадковий характер, неточність вимірювань та інші причини. Інколи, без помітного ущербу для якості розв‘язку, вдається знехтувати фактором невизначеності і розглядати тільки детерміновані моделі. Хоча, чим складніша задача (за кількістю змінних, критеріями оптимальності, обчислювальною трудомісткістю), тим складніше ігнорувати наявність невизначеності в структурі даних.

До недавніх часів вважалось, що трудомісткість розв‘язання задач лінійного програмування досить мала і дозволяє одержувати розв‘язки з десятками тисяч змінних. Але було виявлено, що деякі звичайні, на перший погляд, ЗЛП мають неприємну властивість. Невелика різниця (в долі відсотків) між номінальними і фактичними даними, призводить до одержання не тільки не оптимального, але і недопустимого розв‘язку, тобто будуть порушуватись обмеження задачі і розв‘язок стає практично неприйнятним. Частина задач лінійного програмування, що зберігаються в спеціальній бібліотеці NETLIB має такий ефект, причому в 6 з 13 задач порушення обмежень складало 100%, а в 1 з 6 – 210 000% (задача мала 1000 змінних і 4100 обмежень). Ці проблеми виникають через рівняння балансу - загальний тип рівнянь в економіці.

Приклад. Нехай виробнича діяльність автомобільного підприємства описується лінійною моделлю, в якій критерієм якості є річний прибуток. Серед обмежень такої задачі обов‘язково виникає балансове обмеження:

(кількість проданих за рік автомобілів)х
х(середня ціна одного автомобіля) –
– (кількість вироблених автомобілів)х
х(собівартість виробництва одного автомобіля) $\leq$
$\leq$ річного прибутку.

Припустимо, що було вироблено 200000 таких автомобілів і собівартість склала 10000 умовних одиниць. Аналіз ринку показав, що може бути продано не менше 180000 автомобілів за ціною 14000 умовних одиниць. Таким чином, прибуток повинен складати не менше $5{,}2 \cdot 10^8$ умовних одиниць. Припустимо, що у зв‘язку з неточністю прогнозів, було продано 178000 автомобілів (різниця $\approx 1\%$), а собівартість склала 10200 (різниця 2%). Реальний прибуток склав $4{,}5 \cdot 10^8$ умовних одиниць. Неточність в 1-2% в розрахункових даних призвела до помилки в 14%.

В останні роки, все більшу популярність набирає методологія оптимізації при невизначеності в даних – *робастна оптимізація*.

Нехай задана ЗЛП

$$\max_X C^T X$$
$$AX \le B,$$
$$X \in G,$$

де $X \in \mathbb{R}^n$ - вектор змінних управління, $C \in \mathbb{R}^n$ - вектор коефіцієнтів цільової функції, $A_{m\times n}$ - матриця обмежень, $B \in \mathbb{R}^m$ - вектор правих частин.

Зрозуміло, що для різних наборів вхідних даних, буде одержано різні розв‘язки (рис.12.1).

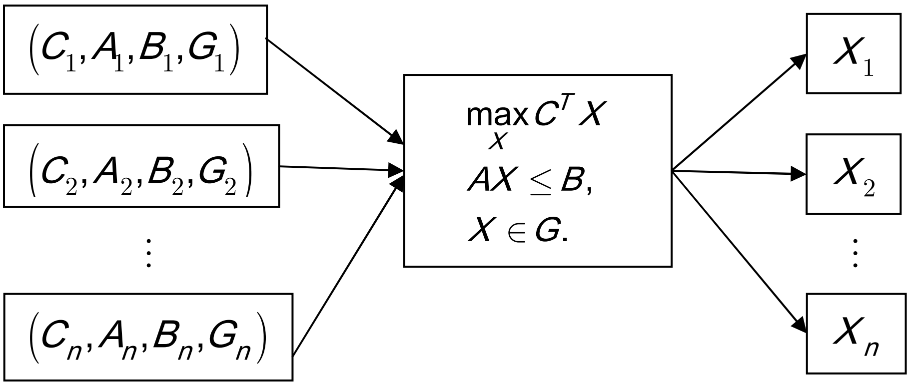

Рис.12.1

Але ми хочемо одержати розв‘язок, «імунізований» до помилок оцінок і мінливості вхідних даних (рис.12.2).

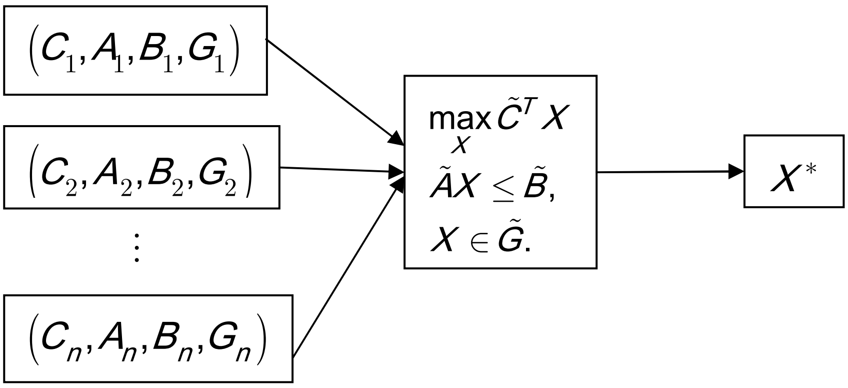

Рис.12.2

Означення 12.1. *Задачею лінійного програмування з невизначеністю даних* (НЗЛП) називають множину

$$\left\{\max_X \left\{C^T X : A(\xi) X \le B, X \in G\right\}\right\}_{\xi \in U} \quad (12.1)$$

ЗЛП загальної структури з різними даними, що належать заданій області невизначеності.

Означення 12.2.

Вектор $X \in \mathbb{R}^n$ називається *робастно допустимим* розв‘язком ЗЛПН, якщо він задовольняє усім реалізаціям обмежень з заданої області невизначеності, тобто

$$A(\xi)X \le B, X \in G, \forall \xi \in U.$$

Означення 12.3.

Робастним аналогом (Robust Counterpart) НЗЛП (12.1) називається оптимізаційна задача

$$\begin{aligned} &\max_X C^T X \\ &\max_{\xi \in U} A(\xi)X \le B, \qquad (12.2) \\ &X \in G. \end{aligned}$$

Концепція робастності суттєво залежить від виду множини невизначеності U, від того в якій мірі ми намагаємося охопити рівень захисту від збурення даних.

В робастній постановці задачі припускають:

1) Нехай J_i - підмножина індексів i-го рядка, яка містить змінні індекси, відповідні коефіцієнти яких мають невизначеності. Кожний елемент a_{ij} в J_i матриці A стає випадковою величиною $\tilde{a}_{ij}$ з симетричного і обмеженого інтервалу $\left[a_{ij} - \hat{a}_{ij}; a_{ij} + \hat{a}_{ij}\right]$, де a_{ij} - номінальне значення, $\hat{a}_{ij} > 0$ - збурення a_{ij}.

2) Покладемо $\xi_{ij} = \dfrac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$, що відповідає невідомому розподілу ймовірностей і набуває значень в $[-1;1]$.

Тоді можна записати $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \xi_{ij}\hat{a}_{ij}$.

Отже, з (12.2) маємо

$$\max_X \sum_j c_j x_j \qquad (12.3)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j + \max_{\xi \in U} \left\{ \sum_{j \in J_i} \xi_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \right\} \le b_i, \forall i \qquad (12.4)$$

$$x_j \ge 0, \forall j \qquad (12.5)$$

Зауваження 12.1.

1. Якщо $\tilde{b}_i = b_i + \xi_{i0}\hat{b}_i$, то умову (12.4) записують у вигляді

$$\sum_j a_{ij}x_j + \max_{\xi\in U}\left\{-\xi_{i0}\hat{b}_i + \sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j\right\} \le b_i, \forall i$$

2. Якщо в цільовій функції (12.3) $\sum_j \tilde{c}_j x_j$, де $\tilde{c}_j = c_j + \xi_{j0}\hat{c}_j$ то задачу $\max_X \min_{\xi\in U}\sum_j \tilde{c}_j x_j = \max_X \min_{\xi\in U}\sum_j \left(c_j + \xi_{j0}\hat{c}_j\right)x_j$ трансформують у рівносильну:

$$\begin{cases} \max\limits_{X,\xi} z \\ z - \sum_j c_j x_j + \max\limits_{\xi\in U}\sum\limits_{j\in J_i}\xi_{j0}\hat{c}_j x_j \le 0. \end{cases}$$

Робастна оптимізаційна задача є дворівневою і суттєво залежить від геометрії множини невизначеності.

12.2. Області невизначеності.

Для описання множини невизначеностей застосовується метрика $\|\xi\|_p = \left(\sum_{j\in J_i}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ для $p = 1,2,\infty$.

1. Коробка (Box, Soyster, 1973).

Невизначена множина описується з використанням ∞-норми невизначеного вектора даних ξ наступним чином

$$U_\infty = \left\{\xi \,\middle|\, \|\xi\|_\infty \le \Psi\right\} = \left\{\xi \,\middle|\, \left|\xi_j\right| \le \Psi, \forall j \in J_i\right\},$$

де Ψ - регульований параметр (бюджет невизначеності), що контролює розмір заданої невизначеності.

$$\max_{\xi\in U}\left\{\sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j : \left|\xi_j\right| \le \Psi, \forall j \in J_i\right\} = \Psi\sum_{j\in J_i}\left|\hat{a}_{ij}x_j\right| = \Psi\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}\left|x_j\right|.$$

Тобто задача (12.3) – (12.5) набуває вигляду

$$\max_X \sum_j c_j x_j$$

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}x_j \le b_i, \forall i \qquad (12.6)$$

$$x_j \ge 0, \forall j$$

Зауважимо, якщо умова $x_j \ge 0, \forall j$ відсутня, то умова

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}\left|x_j\right| \le b_i, \forall i$$

рівносильна системі

$$\begin{cases} \sum_j a_{ij}x_j + \Psi \sum_{j\in J_i} \hat{a}_{ij}u_j \le b_i, \forall i \\ -u_j \le x_j \le u_j \\ u_j \ge 0, \forall j \in J_i. \end{cases}$$

Вибір такої множини невизначеності забезпечує максимально можливий рівень захисту і припускає, що усі параметри можуть досягати своїх найгірших можливих значень (найгірший випадок сценарію).

Перевагою такого підходу є простота розв‘язання, оскільки робастна оптимізаційна задача зводиться до звичайної задачі лінійного програмування.

Недоліком методу є високий рівень консерватизму, можливе суттєве погіршення значення цільової функції.

Графічна ілюстрація для випадку одного балансового рівняння з двома змінними на рис. 12.3.

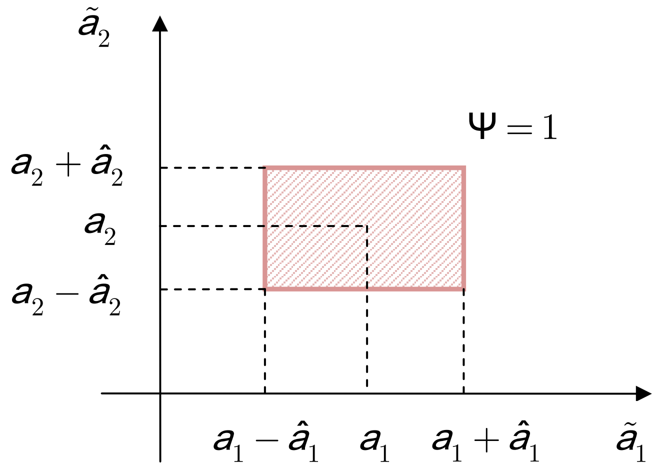

Рис. 12.3

2. Еліпсоїдальна область (Ellipsoidal set, Ben-Tal & Nemirovski, 1998).

Еліпсоїдальна область невизначеності задається з використанням 2-норми невизначеного вектора даних ξ:

$$U_2 = \left\{\xi \middle| \left\|\xi\right\|_2 \le \Omega\right\} = \left\{\xi \middle| \sum_{j\in J_i} \xi_j^2 \le \Omega^2\right\},$$

де Ω - бюджет невизначеності, який контролює розмір невизначеної множини. Якщо $\Omega \ge \sqrt{\left|J_i\right|}$, де $\left|J_i\right|$ - потужність множини J_i, то весь невизначений простір покривається еліпсоїдальною множиною U_2.

$$\max_{\xi\in U}\left\{\sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j : \sum_{j\in J_i}\xi_j^2\le\Omega^2\right\}=\max_{\xi\in U}\left\{\sqrt{\left(\sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j\right)^2} : \sum_{j\in J_i}\xi_j^2\le\Omega^2\right\}=$$

$$=\max_{\xi\in U}\left\{\sqrt{\left(\sum_{j\in J_i}\xi_{ij}{}^2\right)\left(\sum_{j\in J_i}\left(\hat{a}_{ij}x_j\right)^2\right)} : \sum_{j\in J_i}\xi_j^2\le\Omega^2\right\}=\Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2x_j^2}$$

Задача (12.3) – (12.5) запишеться у вигляді

$$\max_X\sum_j c_jx_j$$

$$\sum_j a_{ij}x_j+\Omega\sqrt{\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}^2x_j^2}\le b_i,\ \forall i \qquad (12.7)$$

$$x_j\ge 0,\ \forall j\ .$$

Основна ідея застосування еліпсоїдальної області полягає у тому, що кутові значення навряд чи відбудуться, що дозволяє в певній мірі контролювати консерватизм і отримувати ефективний розв‘язок.

Недоліком є перетворення ЗЛП у більш складний робастний аналог – нелінійну задачу математичного програмування (SOCP).

Графічна ілюстрація на рис. 12.4.

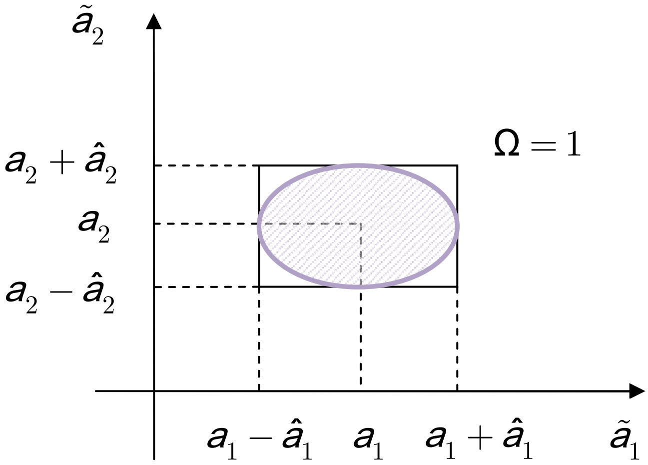

Рис. 12.4

3. Поліедральна множина (Polyhedral set, Bertsimas & Sim, 2004, Li, Ding & Floudas, 2012).

Множина невизначеності задається 1-нормою невизначеного вектора даних ξ :

$$U_1=\left\{\xi\middle|\ \|\xi\|_1\le\Gamma\right\}=\left\{\xi\middle|\ \sum_{j\in J_i}\left|\xi_j\right|\le\Gamma\right\},$$

де параметр Γ визначає бюджет невизначеності. Якщо $\Gamma \geq |J_i|$, то загальний невизначений простір покривається багатогранною множиною.

$$\max_{\xi \in U}\left\{\sum_{j\in J_i}\xi_{ij}\hat{a}_{ij}x_j : \sum_{j\in J_i}|\xi_j| \leq \Gamma\right\} = \left\{\Gamma p_i, p_i \geq \hat{a}_{ij}|x_j|\right\}$$

Тобто для задачі (12.3) – (12.5) маємо:

$$\max_X \sum_j c_j x_j$$

$$\sum_j a_{ij}x_j + \Gamma p_i \leq b_i, \forall i$$

$$p_i \geq \hat{a}_{ij}|x_j|, \forall j \in J_i \qquad (12.8)$$

$$x_j \geq 0, \forall j .$$

Розв‘язання робастної оптимізаційної задачі зводиться до розв‘язання стандартної задачі лінійного програмування.

Запровадження поліедральної множини невизначеності дозволяє контролювати консерватизм, зберігаючи при цьому обчислювальні можливості. Графічна ілюстрація поліедральної множини невизначеності на рис. 12.5.

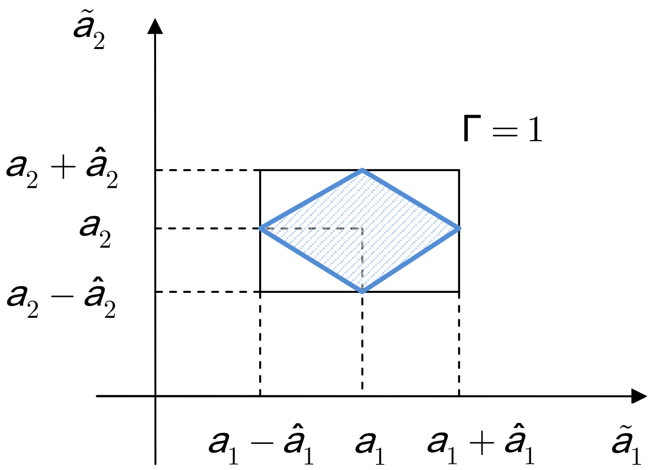

Рис. 12.5.