

Лекція 9. Задача про максимальний потік

9.1. Постановка задач про максимальний потік та мінімальний розріз.

Задача про максимальний потік, як і задача про найкоротший шлях, є частинним випадком задачі про оптимальний потік. Із задачею про максимальний потік тісно пов'язана задача про мінімальний розріз мережі.

Розглянемо мережу, що визначається графом $G = \{I, U\}$, $I = \{1, \dots, n\}$, яка має єдине джерело $1 = s$, єдиний стік $n = t$ та означену на множині U функцію пропускної спроможності r_{ij} . Нехай інтенсивність джерела $d_s = d$. За теоремою існування потоку на мережі інтенсивність стоку має бути рівною $d_t = -d$. Допустимий потік такої мережі визначається співвідношеннями:

$$\begin{cases} \sum_{j:(s,j) \in U} x_{sj} = d, \\ \sum_{j:(i,j) \in U} x_{ij} - \sum_{k:(k,i) \in U} x_{ki} = 0, i \neq s, i \neq t, \\ - \sum_{k:(k,t) \in U} x_{kt} = -d, \\ 0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, (i, j) \in U. \end{cases} \quad (9.1)$$

Задача про максимальний потік полягає у знаходженні максимального значення інтенсивності d , при якому в мережі існує потік. Потік $X^* = \{x_{ij}^*, (i, j) \in U\}$, що відповідає максимальному значенню d^* інтенсивності, називається **максимальним потоком**, а d^* - величина цього потоку.

Розглянемо описану вище мережу. Розрізом мережі, що відокремлює s від t , називається множина дуг $U(C) = \{(i, j) \in U : i \in C, j \notin C\}$, де C - деяка множина вершин ($C \in I$) мережі, така, що $s \in C, t \notin C$.

Пропускна спроможність цього розрізу визначається звичайним чином:

$$r(C) = \sum_{(i,j) \in U(C)} r_{ij}.$$

Приклад 9.1.

Розглянемо мережу (рис. 9.1), де вершина 1 є джерелом, а вершина 6 - стоком. Нехай $C = \{1, 2, 3\}$. Знайти розріз цієї мережі, що відокремлює джерело від стоку і пропускну спроможність цього розрізу.

$U(C) = \{(2,4), (2,5), (3,5)\}$ - розріз, який відокремлює вершину 1 від вершини 6, що відповідає вибраній множині C . Пропускна спроможність цього розрізу

$$r(C) = r_{24} + r_{25} + r_{35} = 5 + 2 + 1 = 8.$$

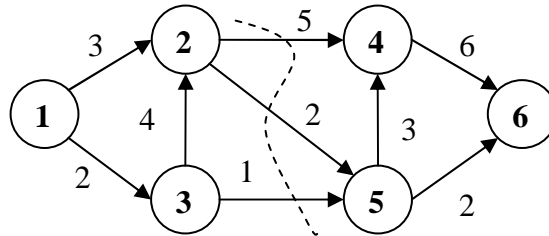


Рис. 9.1

Для кожної певної мережі вибір множини C повністю визначає пропускну спроможність розрізу.

Розріз, що має найменшу пропускну спроможність, називається **мінімальним**.

Задача пошуку такого розрізу називається **задачею про мінімальний розріз**.

Сформульовані задачі про максимальний потік і мінімальний розріз є двоїстими і тому їх розв'язки тісно пов'язані між собою. Запишемо математичні моделі цих задач у вигляді ЗЛП.

Одна з умов в обмеженнях (9.1), а саме перша або третя є зайвою, тому додавши їх задачу знаходження максимального потоку можна переписати у вигляді:

$$\sum_{j:(s,j) \in U} x_{sj} \rightarrow \max \quad (9.2)$$

$$\sum_{j:(s,j) \in U} x_{sj} - \sum_{k:(k,t) \in U} x_{kt} = 0, \quad (9.3)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in U} x_{ij} - \sum_{k:(k,i) \in U} x_{ki} = 0, \quad i \neq s, i \neq t,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}, \quad (i,j) \in U. \quad (9.4)$$

Побудуємо для ЗЛП (9.2) – (9.4) двоїсту задачу, позначивши через $p_i, i = 1, n-1$ двоїсті змінні (потенціали вузлів), що відповідають обмеженням (9.3). Індексні змінні, що визначають належність дуг до мінімального розрізу і відповідають обмеженням (9.4), позначимо через $w_{ij}, (i,j) \in U$. Тоді математична модель двоїстої задачі має вигляд:

$$\sum_{(i,j) \in U} r_{ij} w_{ij} \rightarrow \min \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned}
\rho_s - \rho_j + w_{sj} &\geq 1, (s, j) \in U, \\
\rho_i - \rho_j + w_{ij} &\geq 0, (i, j) \in U, i \neq s, j \neq t, \\
\rho_i - \rho_s + w_{it} &\geq 0, (i, t) \in U, \\
w_{ij} &\geq 0, (i, j) \in U, \rho_i - \text{вільні}, i \in I.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Зауваження 9.1.

Двоїсту задачу можна скласти і безпосередньо до прямої задачі про максимальний потік, записану у вигляді (9.1)

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j) \in U} r_{ij} w_{ij} \rightarrow \min \\
&\rho_i - \rho_j + w_{ij} \geq 0, (i, j) \in U, i \neq s, j \neq t, \\
&\rho_s = 0, \rho_t = 1, \\
&w_{ij} \geq 0, (i, j) \in U, \rho_i - \text{вільні}, i \in I.
\end{aligned}$$

Теорема 9.1.

(Форда-Фалкерсона). Величина максимального потоку із джерела s в стік t дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу, що відокремлює s від t .

Δ Нехай $X^* = \{x_{ij}^*, (i, j) \in U\}$ - максимальний потік на мережі, що визначається графом G , d^* - величина максимального потоку. Нехай $U(C)$ - довільний розріз мережі, що відокремлює s від t , $r(C)$ - його пропускна спроможність. За теоремою про існування потоку $d^* \leq r(C)$. Необхідно показати, що існує така множина C^* , що

$$d^* = \min_{C: C \subset I, s \in C, t \notin C} r(C) = r(C^*).$$

Множина C^* , що визначає мінімальний розріз, будується на основі потоку X^* таким чином:

$$\begin{aligned}
&s \in C^*, \\
&\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x_{ij}^* < r_{ij}, \text{ то } j \in C^*, \\
&\text{якщо } i \in C^* \text{ та } x_{ki}^* > 0, \text{ то } k \in C^*.
\end{aligned} \tag{9.7}$$

1. Покажемо, що $t \notin C^*$. Методом від супротивного: нехай $t \in C^*$. Із означення (9.7) множини C^* випливає, що будь-які дві її вершини можна з'єднати ланцюгом. З'єднаємо вершини $s \in C^*$ і $t \in C^*$:

$$L = [s = i_1, i_2, \dots, i_m = t]. \tag{9.8}$$

Для цього ланцюга умови (9.7) можна переписати так:
якщо для ребра $i_k, i_{k+1} \in U$, то $x_{i_k, i_{k+1}}^* < r_{i_k, i_{k+1}}$, (9.9)

якщо для ребра $[i_k, i_{k+1}](i_{k+1}, i_k) \in U$, то $x_{i_{k+1}, i_k}^* > 0$. (9.10)

Нехай

$$L^+ = \left\{ [i_k, i_{k+1}] \in L : (i_k, i_{k+1}) \in U, x_{i_k, i_{k+1}}^* < r_{i_k, i_{k+1}} \right\},$$

$$L^- = \left\{ [i_k, i_{k+1}] \in L : (i_{k+1}, i_k) \in U, x_{i_{k+1}, i_k}^* > 0 \right\}.$$

Покладемо

$$\theta_{i_k i_{k+1}} = \begin{cases} r_{i_k i_{k+1}} - x_{i_k i_{k+1}}^*, & [i_k, i_{k+1}] \in L^+, \\ x_{i_{k+1} i_k}^*, & [i_k, i_{k+1}] \in L^-. \end{cases}$$

Нехай $\theta = \min_{k=1, m-1} \theta_{i_k i_{k+1}}$.

Зрозуміло, що $\theta > 0$. Змінимо потік вздовж ланцюга L , збільшуючи його на θ уздовж ребер множини L^+ і зменшуючи на θ вздовж ребер множини L^- . У результаті одержимо допустимий потік величини $d^* + \theta$, що суперечить припущенню про максимальність потоку X^* . Отже, $t \notin C^*$.

2. Покажемо, що $d^* = r(C^*)$. Із означення (9.7) множини C^* випливає, що

$$\begin{aligned} \text{якщо } i \in C^*, j \notin C^* \text{ } (i, j) \in U, \text{ то } x_{ij}^* &= r_{ij}, \\ \text{якщо } i \in C^*, k \notin C^* \text{ } (k, i) \in U, \text{ то } x_{ki}^* &= 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Запишемо співвідношення (9.1) при $X = X^*$ для $i \in C^*$

$$\sum_{j: (s, j) \in U} x_{sj}^* = d^*,$$

$$\sum_{j: (i, j) \in U} x_{ij}^* - \sum_{k: (k, i) \in U} x_{ki}^* = 0, i \neq s.$$

Підсумовуючи останні рівності по $i \in C^*$, маємо

$$\sum_{i, j: i \in C^*, (i, j) \in U} x_{ij}^* - \sum_{i, k: i \in C^*, (k, i) \in U} x_{ki}^* = d^*.$$

Розглядаючи випадки $j, k \in C^*$ та $j, k \notin C^*$, з останньої рівності маємо:

$$\sum_{i,j:i \in C^*, j \notin C^*, (i,j) \in U} x_{ij}^* + \sum_{i,j:i \in C^*, j \in C^*, (i,j) \in U} x_{ij}^* -$$

$$- \sum_{i,k:i \in C^*, k \in C^*, (k,i) \in U} x_{ki}^* - \sum_{i,k:i \in C^*, k \notin C^*, (k,i) \in U} x_{ki}^* = d^*.$$

Другий і третій доданки у цій рівності взаємно знищуються і, приймаючи до уваги (9.11), одержуємо

$$\sum_{i,j:i \in C^*, j \notin C^*, (i,j) \in U} r_{ij} = d^*, \text{ або } r(C^*) = d^*. \blacktriangle$$

Зауваження.

Теорема тривіальна, якщо мережа складається з вершин та дуг, що утворюють єдиний шлях від s до t . Приміром, мінімальний розріз (рис. 9.2) утворює дуга (2,3). Її пропускна спроможність $r_{23} = 2$ визначає максимальну інтенсивність $d^* = 2$ допустимого для мережі потоку.

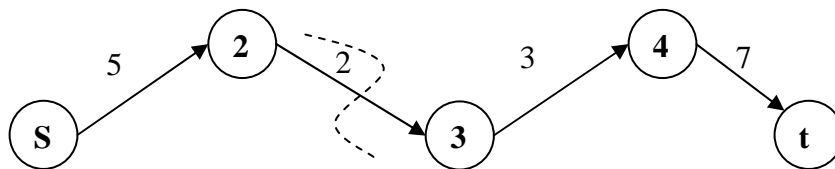


Рис. 9.2

Наслідок 9.1.

Якщо дуга (i, j) входить до мінімального розрізу, то величина максимального потоку вздовж цієї дуги дорівнює її пропускній спроможності r_{ij} . При цьому кажуть, що потік насичує дугу.

9.2. Алгоритм Форда-Фалкерсона

Для розв'язування задачі про максимальний потік Фордом і Фалкерсоном був розроблений спеціальний метод.

Згідно теореми про максимальний потік та мінімальний розріз за відомим максимальним потоком $X^* = \{x_{ij}^*, (i, j) \in U\}$ легко побудувати мінімальний розріз $U(C^*)$. Крім того, якщо потік не є максимальним, то можливе його збільшення шляхом зміни потоку вздовж певного ланцюга. Ці факти лежать в основі методу Форда-Фалкерсона, що являє собою рекурентну процедуру, на кожному кроці якої позначаються вершини або будується потік більшої величини.

Алгоритм Форда-Фалкерсона розпочинає роботу з будь-якого допустимого потоку X^0 , зокрема нульового, величини d^0 . Згідно (9.2) для цьо-

го потоку визначається множина C^0 . Якщо $t \notin C^0$, то потік X^0 є максимальним, в іншому випадку можна знайти $\theta^0 > 0$ та новий потік $X^1 = \{x_{ij}^1, (i, j) \in U\}$ величини $d^1 = d^0 + \theta^0$. Для нового потоку цей цикл операцій повторюється тощо.

Процеси визначення C^k та θ^k об'єднуються в один процес, при якому розставляють позначки вершин. Позначка $\mu(i)$ довільної вершини i складається з двох чисел N_i та θ_i . Ці числа означають, що вздовж деякого ланцюга, останнім ребром якого є $[|N_i|, i]$ можна додатково поставити θ_i одиниць потоку з вершини s до вершини i .

Алгоритм Форда-Фалкерсона

Крок 1 (процес розставлення позначок). На цьому кроці кожна з вершин належить до одного з трьох типів:

- 1) непозначена,
- 2) позначена і непроглянута,
- 3) позначена і проглянута.

Спочатку всі вершини непозначені.

Позначимо вершину s позначкою $\mu(s) = (0, \theta_s = \infty)$, що означає, що можна послати потік з вершини s необмеженої величини.

Тепер вершина s позначена і непроглянута.

Взагалі, нехай j – позначена і непроглянута вершина, $\mu(j) = (+i, \theta_j)$ або $\mu(j) = (-i, \theta_j)$ – її позначка. Розглядаємо ще непозначені вершини $k : (j, k) \in U$ і $x_{jk} < r_{jk}$. Кожній з таких вершин приписуємо позначку $\mu(k) = (+j, \theta_k)$, де $\theta_k = \min\{\theta_j, r_{jk} - x_{jk}\}$. Розглядаємо ще непозначені вершини $k : (k, j) \in U$ і $x_{kj} > 0$. Кожна з таких вершин одержує позначку $\mu(k) = (-j, \theta_k)$, де $\theta_k = \min\{\theta_j, x_{kj}\}$.

Всі вершини k , які одержали позначки, тепер позначені і непроглянуті, а вершина j – позначена і проглянута. Продовжуємо приписувати позначки непозначеним вершинам до тих пір, поки або вершина t виявиться позначеною, або не можна буде позначити жодної вершини і вершина t виявиться непозначеною.

У другому випадку існуючий потік X – максимальний, а множина позначених вершин C^* визначає мінімальний розріз мережі. У першому випадку існуючий потік на кроці 2 можна збільшити.

Крок 2 (збільшення потоку). Нехай $\mu(t) = (+k, \theta_t)$ або $\mu(t) = (-k, \theta_t)$ позначка вершини t . Це означає, що існуючий потік з s в t можна збільшити на величину θ_t . Для цього в першому випадку замінюємо

$x_{kt} + \theta_t$, у другому x_{tk} замінюємо на $x_{tk} - \theta_t$. Переходимо до вершини k і виконуємо аналогічні операції, змінюючи величину потоку на ту ж величину θ_t . Продовжуємо ці дії, поки не досягнемо вершини s . Після цього ліквідуємо позначки усіх вершин і переходимо до кроку 1.

Приклад 9.1.

Знайти максимальний потік на мережі з єдиним джерелом $s = 1$ і єдиним стоком $t = 8$ при прийнятих позначеннях (рис. 9.3)

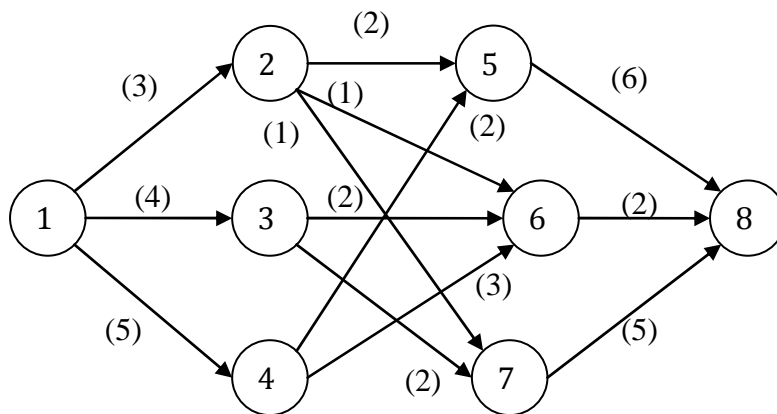
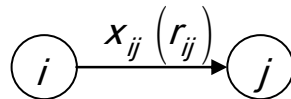


Рис. 9.3

З метою зменшення кількості ітерацій методу Форда-Фалкерсона побудуємо ненульовий початковий допустимий потік X^0 , який будемо послідовно розглядаючи шляхи на мережі з джерела 1 в стік 8 і збільшуючи дугові потоки вздовж кожного шляху на максимально допустиму величину. Якщо це зробити складно, можна починати з допустимого нульового потоку.

1) Розглянемо шлях $\{(1,2), (2,5), (5,8)\}$. Найвужчим місцем є дуга $(2,5)$, пропускна спроможність якої $r_{25} = 2$ і визначає максимальну величину потоку крізь дуги даного шляху.

2) Розглянемо шлях $\{(1,2), (2,6), (6,8)\}$ рис. 3. Найвужчі місця - дуги $(1,2)$ і $(2,6)$, $r_{12} - x_{12} = 1$, $r_{26} - x_{26} = 1 - 0 = 1$, тому максимальний потік через цей шлях дорівнює 1.

3) Наступний шляхи.

Ітерація I на основі потоку X^0 .

Крок 1. Позначаємо вершину 1 позначкою $N_1 = 0, \theta_1 = \infty$. Після першого кроку множина позначених вершин $\{1(0, \infty)\}$.

Крок 2. Будуємо множину непозначених вершин $\{3,4\}$, в які заходять ненасичені потоком дуги.

$$(1,3) \quad r_{13} - x_{13}^0 = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$(1,4) \quad r_{14} - x_{14}^0 = 5 - 2 = 3 > 0$$

Множина непозначених вершин з ненульовим потоком, які заходять в вершину 1 порожня.

Позначаємо вершини $\{3,4\}$:

$$N_3 = 1, \theta_3 = \min\{\theta_1, r_{13} - x_{13}^0\} = \min\{\infty, 1\} = 1, \text{ тому } 3(1,1);$$

$$N_4 = 1, \theta_4 = \min\{\theta_1, r_{14} - x_{14}^0\} = \min\{\infty, 3\} = 3, \text{ тому } 4(1,3).$$

Крок 3.

Будуємо множину непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг – вершина $\{6\}$, що виходять з позначених вершин $\{1(0, \infty), 3(1,1), 4(1,3)\}$:

$$(3,6) \quad r_{36} - x_{36}^0 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$(4,6) \quad r_{46} - x_{46}^0 = 3 - 0 = 3 > 0$$

Множина непозначених вершин з ненульовим потоком, що заходять в позначені вершини порожня. Оскільки вершину $\{6\}$ можна позначити як із вершини $\{3\}$ так і з вершини $\{4\}$, то домовимось позначати найбільшу кількість вершин з позначених вершин з найменшим номером, тому :

$$N_6 = 3, \theta_6 = \min\{\theta_3, r_{36} - x_{36}^0\} = \min\{1, 1\} = 1 \Rightarrow 6(3,1).$$

Крок 4.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг порожня. Множина непозначених вершин, що є початками дуг з ненульовим потоком, які заходять в позначені вершини - $\{2\}$:

$$(2,6) \quad x_{26}^0 = 1 > 0.$$

Позначаємо вершину $\{2\}$: $2(-6,1)$ (рис.10), оскільки

$$N_2 = -6, \theta_2 = \min\{\theta_6, x_{26}^0\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

Крок 5.

Позначаємо вершину $\{7\}$:

$$(2,7) \quad r_{27} - x_{27}^0 = 1 - 0 = 1 > 0$$

$$N_7 = 2, \theta_7 = \min\{\theta_2, r_{27} - x_{27}^0\} = \min\{1, 1\} = 1 \Rightarrow 7(2,1) \text{ (рис. 11)}$$

Множина непозначених вершин з ненульовим потоком, що заходять в позначені вершини порожня.

Крок 6.

Множина непозначених вершин, що є кінцями ненасичених дуг - це стік $\{8\}$.

$$(7,8) \quad r_{78} - x_{78}^0 = 5 - 2 = 3 > 0$$

$$N_8 = 7, \theta_8 = \min\{\theta_7, r_{78} - x_{78}^0\} = \min\{1, 3\} = 1 \Rightarrow \delta(7,1)$$

Маємо множину позначених вершин

$$\{1(0, \infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1), 2(-6,1), 7(2,1), 8(7,1)\}$$

Після позначення стоку позначення вершин припиняється. Переходимо до змінення потоку (рис. 9.4).

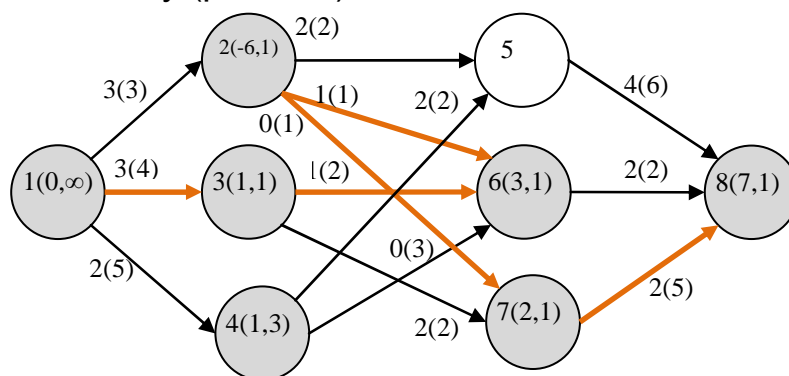


Рис. 9.4.

Маємо множину позначених вершин

$$\{1(0, \infty), 3(1,1), 4(1,3), 6(3,1), 2(-6,1), 7(2,1), 8(7,1)\}$$

Після позначення стоку позначення вершин припиняється. Переходимо до змінення потоку.

Змінювати потік будемо вздовж ланцюга $L = \{[1,3], [3,6], [6,2], [2,7], [7,8]\}$, починаючи з кінця, тобто з дуги, що заходить у стік 8.

Для

$$8(7,1) \quad N_8 = 7 > 0, \text{ то } x_{78}^1 = x_{78}^0 + \theta_8 = 2 + 1 = 3,$$

$$7(2,1) \quad N_7 = 2 > 0, \text{ то } x_{27}^1 = x_{27}^0 + \theta_8 = 0 + 1 = 1,$$

$$2(-6,1) \quad N_2 = -6 < 0, \text{ то } x_{26}^1 = x_{26}^0 - \theta_8 = 1 - 1 = 0,$$

$$6(3,1) \quad N_6 = 3 > 0, \text{ то } x_{36}^1 = x_{36}^0 + \theta_8 = 1 + 1 = 2,$$

$$3(1,1) \quad N_3 = 1 > 0, \text{ то } x_{13}^1 = x_{13}^0 + \theta_8 = 3 + 1 = 4$$

Отримали новий потік X^1 , що відрізняється від X^0 обчисленими компонентами.

Ітерація II на основі потоку X^1 .

Крок 1. Позначаємо вершину $1(0, \infty)$.

Крок 2. Позначаємо вершину $\{4\}$ (ненасичена дуга $(1,4)$):

$$N_4 = 1, \theta_4 = \min\{\theta_1, r_{14} - x_{14}^1\} = \min\{\infty, 3\} = 3 \Rightarrow 4(1, 3).$$

Крок 3. Позначаємо вершину $\{6\}$ (ненасичена дуга $(4,6)$):

$$N_6 = 4, \theta_6 = \min\{\theta_4, r_{46} - x_{46}^1\} = \min\{3, 3\} = 3 \Rightarrow 6(4, 3).$$

Крок 4. Позначаємо вершину $\{3\}$ (початок дуги з ненульовим потоком $x_{36}^1 = 2 > 0$):

$$N_2 = -6, \theta_3 = \min\{\theta_6, x_{36}^1\} = \min\{3, 2\} = 2 \Rightarrow 3(-6, 2) \text{ (рис.9.5)}.$$

Подальший процес позначення неможливий.

Множина позначених вершин $C^* = \{1, 3, 4, 6\}$ породжує мінімальний розріз

$U(C^*) = \{(1,2), (3,7), (4,5), (6,8)\}$, що відділяє джерело 1 від стоку 8.

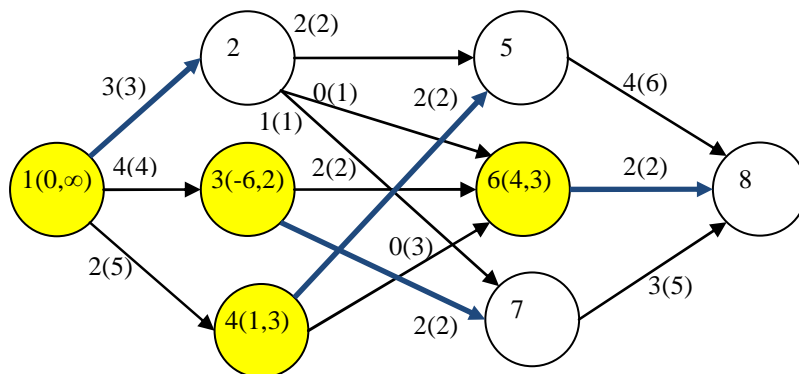


Рис. 9.5

За теоремою Форда-Фалкерсона пропускна спроможність цього розрізу $r(C^*) = r_{12} + r_{37} + r_{45} + r_{68} = 3 + 2 + 2 + 2 = 9$ і дорівнює величині $d^* = 9$ максимального потоку $X^* = X^1$ мережі з джерела 1 в стік 8.