Лекція 7. Транспортна задача лінійного програмування

7.1. Математична модель Т-задачі

Транспортні задачі відносяться до ЗЛП і можуть бути розв‘язані симплекс-методом. Але матриця системи обмежень транспортної задачі (Т-задачі) має специфічний вигляд і тому для таких задач розроблені спеціальні методи розв‘язання.

Нехай однорідний вантаж зосереджений у m постачальників $P_1,\dots,P_m$ в об‘ємах $a_1,\dots,a_m$. Даний вантаж необхідно доставити n споживачам $Q_1,\dots,Q_n$ у обсягах $b_1,\dots,b_n$. Відомі $c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ вартості перевезень одиниці вантажу від кожного i-го постачальника кожному j-му споживачу. Потрібно скласти план перевезень, щоб сумарні затрати були мінімальними. Математична модель Т-задачі має вигляд

$$Z(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \tag{7.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m}\ \text{-} \tag{7.2}$$

запаси m постачальників вивозяться повністю.

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}\ \text{-} \tag{7.3}$$

потреби усіх n споживачів задовольняються повністю,

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{7.4}$$

В розглянутій моделі припускають, що

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j. \tag{7.5}$$

Така задача називається *задачею з правильними балансом*, а її модель – *закритою*.

Якщо умова (7.5) не виконується, то задача називається *задачею з неправильним балансом*, а її модель – *відкритою*.

Вхідні дані Т-задачі зазвичай записують у таблицю, яка називається розподільчою (табл.7.1). Позначимо $C=\left(c_{ij}\right),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ - матриця вартостей. Транспортні витрати записують у верхньому правому куті відповідної таблиці.

Таблиця 7.1

Розподільча таблиця

споживч. / постач.	Q_1	…	Q_j	…	Q_n	a
P_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
P_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
b	b_1	…	b_j	…	b_n	…

Математичне формулювання Т-задачі: знайти *матрицю перевезень* $X = \left(x_{ij}\right),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, що задовольняє системі обмежень (7.2), (7.3) і забезпечує мінімум цільової функції (7.1).

Для зручності викладення запишемо матриці X і C у вигляді векторів

$$X = \left(x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, x_{m1}, \dots, x_{mn}\right)^T,$$

$$C = \left(c_{11}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, c_{m1}, \dots, c_{mn}\right)^T.$$

Зазвичай, компоненти x_{ij} вектора перевезень заносять до розподільчої таблиці лише тоді, коли $x_{ij} > 0$. У цьому випадку відповідна клітинка таблиці називається *заповненою*, інакше – *вільною*.

Для дослідження існування розв‘язків Т-задачі запишемо її у векторній формі. Розглянемо матрицю A системи обмежень (7.2), (7.3):

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \end{array}.$$

Кожен стовпець матриці A, що відповідає змінній x_{ij} є вектором-умовою задачі, позначається A_{ij} і називається вектором комунікацій

P_iQ_j. Кожен вектор має $m+n$ координат і тільки дві з них відмінні від нуля і дорівнюють 1. Перша одиниця в A_{ij} на i-му місті, а друга – на $(m+j)$-ому, тобто

$$A_{ij} = (\overset{1}{0}, \dots, \overset{i}{1}, \dots, \overset{m}{0}, \overset{m+1}{0}, \dots, \overset{m+j}{1}, \dots, \overset{m+n}{0})^T,$$

$A_0 = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_m, b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)^T$ - вектор правих частин рівностей (7.2), (7.3) (вектор виробництва-споживання).

Тоді математична модель Т-задачі (7.1) – (7.4) набуває вигляду

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_{ij} = A_0, x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

або у матричній формі

$$Z(X) = CX \to \min, AX = A_0, x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

7.2. Властивості Т-задачі

Теорема 7.1. (*Критерій допустимості Т-задачі*).
Для існування розв'язку Т-задачі лінійного програмування необхідно і достатньо виконання умови (7.5)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

тобто, щоб сумарні запаси постачальників дорівнювали сумарним потребам споживачів.

$\triangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $X^0 = (x_{ij}^0), x_{ij}^0 \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ - допустимий розв'язок Т-задачі. Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^0 = a_i, i = \overline{1,m}, \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 = b_j, j = \overline{1,n}.$$

Покажемо, що виконується (7.5).

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^0 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

тобто задача збалансована.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай виконується умова (7.5), тоді

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M.$$

Покажемо, що ОДР – непорожня множина. Перевіримо, що

$$X^0=\left(x_{ij}^0\right)=\left(\frac{a_ib_j}{M}\right),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

є допустимим розв‘язком. Підставимо X^0 в (7.2), (7.3):

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^0=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{M}=\frac{a_i}{M}\sum_{j=1}^{n}b_j=\frac{a_i}{M}\cdot M=a_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^0=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_ib_j}{M}=\frac{b_j}{M}\sum_{i=1}^{m}a_i=\frac{b_j}{M}\cdot M=b_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Очевидно, що $x_{ij}^0=\dfrac{a_ib_j}{M}\geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$, тому X^0 є допустимим розв‘язком. Крім того, ОДР G є обмеженою множиною, оскільки $0\leq x_{ij}\leq \min\left(a_i,b_j\right),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

Тому цільова функція $Z\left(X\right)$, як неперервна, досягає на обмеженій множині свого мінімуму. ▲

Теорема 7.2. (*Про ранг матриці умов*).
Ранг матриці умов A Т-задачі лінійного програмування на 1 менше кількості рівнянь:

$$\operatorname{rang}A=m+n-1.$$

△Сума перших m рядків матриці A дорівнює сумі решти її n рядків, тому $\operatorname{rang}A\leq m+n-1$. Покажемо, що $\operatorname{rang}A=m+n-1$.

Складемо мінор, утворений з перших $m+n-1$ компонент векторів умов $A_{1n},A_{2n},\ldots,A_{mn},A_{11},A_{12},\ldots,A_{1n-1}$.

$$M_{m+n-1}=\begin{array}{cc} \begin{matrix} A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{mn} & A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n-1} \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}n-1 \end{matrix} \end{array}.$$

Цей мінор має трикутний вигляд і дорівнює добуткові елементів на головній діагоналі, тобто 1. Тому $\operatorname{rang}A=m+n-1$.▲

Остання властивість Т-задачі означає, що серед обмежень (7.2), (7.3) лінійно незалежних $m+n-1$ і одне з них можна відкинути, але цього не роблять, щоб не порушувати симетрію.

7.3. Опорний розв‘язок Т-задачі

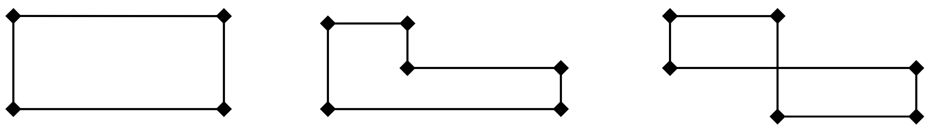
Означення 7.1. Опорним розв‘язком Т-задачі називається довільний допустимий розв‘язок, для якого вектори-умови, що відповідають додатним координатам лінійно незалежні.

Оскільки $\operatorname{rang} A = m + n - 1$, то опорний розв‘язок не може мати більше ніж $m + n - 1$ відмінних від нуля координат. Довільний опорний розв‘язок записують в розподільчу таблицю, в яку внесені вихідні дані.

Клітини таблиці нумерують відповідно до номеру рядка і стовпця, на перетині яких вона знаходиться, тобто (i, j), i - номер рядка, j -номер стовпця. Кожній клітині з номером (i, j) відповідає змінна x_{ij}, якій відповідає вектор умов A_{ij}.

Означення 7.2. Циклом називається така послідовність клітин таблиці Т-задачі $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_1)$ в якій дві і тільки дві сусідні клітини містяться в одному рядку або стовпці, причому перша і остання також знаходяться в одному рядку або стовпці.

Приміром,



Теорема 7.3. (*Зв‘язок лінійної залежності векторів з циклом*). Система векторів-умов Т-задачі лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли з відповідних клітин таблиці можна виділити частину, що утворює цикл.

$\triangle$ $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай вектори $A_{i_1 j_1}, A_{i_1 j_2}, \ldots, A_{i_k j_1}$ лінійно залежні, тоді існує нетривіальна лінійна комбінація цих векторів, що дорівнює нулю, тобто $\exists\ |\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_s| \neq 0$, що

$$\lambda_1 A_{i_1 j_1} + \lambda_2 A_{i_1 j_2} + \ldots + \lambda_s A_{i_k j_1} = 0. \tag{7.6}$$

Нехай $\lambda_1 \neq 0$, вектор $A_{i_1 j_1}$ має дві координати рівні 1 з номерами i_1 і $m + j_1$, решта координат дорівнюють 0. В рівність (7.6) повинен входити вектор, у якого одна з координат =1 і який потрібно помножити на $-\lambda_1$, щоб забезпечити рівність нулю цієї координати в лінійній комбінації векторів. Нехай такий вектор має номер $A_{i_1 j_2}$, але він має ще одну ненульову координату, що дорівнює 1 з номером $m + j_2$, отже в рівності (7.6) є ще один вектор з такою ж одиничною координатою тощо.

У вибраній таким чином послідовності векторів повинен існувати вектор $A_{i_k j_1}$, у якого другий індекс співпадає з другим індексом першого вектора.

Даній послідовності векторів відповідає сукупність клітин таблиці Т-задачі $(i_1, j_1),(i_1, j_2),(i_2, j_2),\ldots,(i_k, j_1)$, що утворює цикл.

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай з відповідних векторам A_{ij} клітин (i, j) вибрана послідовність, що утворює цикл $(i_1, j_1),(i_1, j_2),(i_2, j_2),\ldots,(i_k, j_1)$.

Тоді $A_{i_1 j_1} - A_{i_1 j_2} + A_{i_2 j_2} - \ldots - A_{i_k j_1} = 0$, отже система векторів $A_{i_1 j_1}, A_{i_1 j_2}, \ldots, A_{i_k j_1}$ лінійно залежна. ▲

Наслідок 7.1. Допустимий розв‘язок Т-задачі $X = (x_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ є опорним тоді і тільки тоді, коли із зайнятих їм клітин не можна утворити цикл.

7.4. Метод викреслювання

Метод викреслювання дозволяє перевірити опорність розв‘язку Т-задачі. Нехай допустимий розв‘язок Т-задачі, що має $m + n - 1$ відмінну від нуля координату записаний в таблицю. Для того, щоб даний розв‘язок був опорним, вектори умови, що відповідають додатним координатам повинні бути лінійно незалежними. Для цього зайняті клітини не повинні утворювати цикл. Рядок або стовпець таблиці з однією зайнятою клітиною не може входити в цикл, оскільки цикл має рівно 2 клітини в кожному рядку і стовпці. Отже, можна викреслити спочатку або усі рядки таблиці, що містять 1 зайняту клітину, а потім повернутися до стовпців (рядків) і продовжити викреслювання.

1) Якщо усі рядки і стовпці викреслені, то система векторів лінійно незалежна (не може утворювати цикл) і розв‘язок опорний.

2) Якщо після викреслювання залишилась частина клітин, то ці клітини утворюють цикл, система векторів лінійно залежна і розв‘язок не опорний.

Приклад.

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

7.5. Метод північно-західного кута

Заповнення таблиці транспортної задачі починається з верхнього лівого кута і складається з однотипних кроків. На кожному кроці, виходячи з запасів чергового постачальника і запиту чергового споживача заповнюється тільки 1 клітина і виключається з розгляду 1 постачальник або споживач, тобто $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$.

1) Нехай $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ і виключається i-ий постачальник, $x_{ik} = 0, k = \overline{1,n}, k \neq j, b'_j = b_j - a_i$.

2) Якщо $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ і виключається j-ий споживач, $x_{kj} = 0, k = \overline{1,m}, k \neq i, a'_i = a_i - b_j$.

3) Якщо $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ і виключається або i-ий постачальник $x_{ik} = 0, k = \overline{1,n}, k \neq j, b'_j = 0$, або j-ий споживач, $x_{kj} = 0, k = \overline{1,m}, k \neq i, a'_i = 0$.

Нульові перевезення записують в таблицю тільки тоді, коли вони потрапляють в клітину (i, j), що потрібно заповнити (базисні нулі). Інші клітини з нульовими перевезеннями вільні (залишаються порожніми). Наявність помилок перевіряємо кількістю заповнених клітин $(m+n-1)$ і лінійною незалежністю векторів-умов.

Теорема 7.4. Розв‘язок Т-задачі, побудований методом північно-західного кута є опорним.

$\triangle$ Число зайнятих клітин $N = m+n-1$. На кожному кроці заповнюється 1 клітина і виключається 1 рядок (постачальник) або 1 стовпець (споживач). Через $m+n-2$ кроки буде зайнято $m+n-2$ клітини. Залишаться не викресленими 1 рядок і 1 стовпець, при цьому незайнята одна клітина. Після заповнення число зайнятих клітин $m+n-1$. Методом викреслювання перевіряємо, що вектори-умови лінійно незалежні. ▲

Недоліки методу: побудований опорний план не враховує вартість перевезень, тому опорний розв‘язок, зазвичай не є оптимальним.

7.6. Метод мінімальної вартості

Метод мінімальної вартості дозволяє побудувати розв‘язок, близький до оптимального, оскільки використовує матрицю вартості Т-задачі $C = (c_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Як і у випадку північно-західного кута на кожному кроці заповнюється тільки 1 клітина таблиці, що відповідає мінімальній вартості $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$ і виключається 1 рядок (постачальник) або 1 стовпець (споживач). Чергову клітину, що відповідає $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$ заповнюють за тими ж правилами, що і в методі північно-західного кута. На кожному кроці виключається або 1 споживач, або 1 постачальник.

Теорема 7.5. Розв‘язок Т-задачі, побудований методом мінімальної вартості є опорним.

Доведення аналогічне попередньому.

7.7. Метод Фогеля.

В даному методі використовується штрафна вартість. Для кожного рядка і стовпця штрафна вартість – це різниця між найбільш дешевим маршрутом і наступним за ним з точки зору критерію мінімізації вартості перевезень.

1) Для кожного рядка і стовпця найменше значення вартості віднімається від з найближчого до нього значення за критерієм мінімальної вартості. Отримуємо штраф за відсутність перевезень в клітинах з найменшою вартістю.

2) Вибирається рядок або стовпець з найбільшим значенням штрафу і в клітину з найменшим значенням вартості перевезень для даного рядка або стовпця завантажується максимально можлива кількість продукту.

3) Коректується значення в рядках і стовпцях таблиці.

4) Рядки і стовпці, в яких пропозиція або попит вичерпано, виключаються з розгляду.

5) Повертаються до пункту 1) і перераховують штрафи без урахування заповнених клітин і виключених рядків (стовпців).

6) Якщо залишається 1 рядок або стовпець, то штрафи не обчислюють, а заповнюють його за методом мінімальної вартості.

7.7. Перехід від одного опорного плану до іншого.

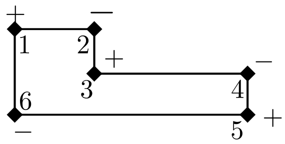
В Т-задачах перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється за допомогою циклу. Для деякої вільної клітини будується цикл, що містить частину клітин опорного розв‘язку.

Теорема 7.6. (*Про існування і єдність циклу*).
Якщо таблиця Т-задачі містить опорний розв‘язок, то для будь-якої вільної клітини існує єдиний цикл, що містить цю клітину і частину клітин, зайнятих опорним розв‘язком.

$\triangle$ Опорний розв‘язок Т-задачі займає $N = m + n - 1$ клітин таблиці, яким відповідають лінійно-незалежні вектори-умови. Жодна з частин не утворює цикл. Якщо додати 1 клітину, то $m + n$ відповідних їм векторів лінійно-залежні. За теоремою 7.3 існує цикл, що містить цю клітину. Нехай таких циклів два:
$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_1)$ і $(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_1, j_l)$. Тоді, об‘єднавши клітини цих обох циклів без вільної клітини (i_1, j_1) одержимо послідовність клітин $(i_1, j_2), \ldots, (i_k, j_1), (i_2, j_1), \ldots, (i_1, j_l)$, що утворюють цикл.

Але це суперечить лінійній незалежності векторів-умов, що утворюють базис опорного плану. Отже, цикл єдиний. ▲

Цикл називається *означеним*, якщо його кутові клітини пронумеровані і непарним клітинам приписано знак "$+$", а парним "$-$".



$$C^0 = C^0_+ \cup C^0_-$$

Зсувом за циклом на величину θ називається збільшення обсягу перевезень в усіх непарних клітинах циклу, відмічених «+»($(i,j) \in C^0_+$) на θ і зменшення об‘ємів перевезень в усіх парних клітинах, відмічених знаком «-» ($(i,j) \in C^0_-$) на θ.

Для того, щоб розв‘язок залишався допустимим, необхідно, щоб $0 \le \theta \le \min\limits_{i,j:(i,j)\in C^0_-} x_{ij}$.

Покладемо $\theta = \min\limits_{i,j:(i,j)\in C^0_-} x_{ij}$, тоді принаймні одна з базисних клітин стає вільною, замість неї базисною стає клітина (i_1, j_1), для якої побудований цикл. Якщо $\min x_{ij}$ реалізується на двох і більше клітинах, то лише одну з них (будь-яку) виводять з числа базисних, залишивши в решті базисні нулі для збереження опірності нового плану. Новий опорний план X':

$$X' = \begin{cases} x_{ij}, (i,j) \notin C^0, \\ x_{ij} + \theta, (i,j) \in C^0_+, \\ x_{ij} - \theta, (i,j) \in C^0_-. \end{cases} \tag{7.7}$$

7.8. Двоїста задача до Т-задачі лінійного програмування.

Для математичної моделі Т-задачі

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{7.8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n} \end{array}\right| \begin{array}{l} u_i \\ v_j \end{array} \tag{7.9}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

побудуємо двоїсту задачу:

$$F(Y)=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max,$$

$$u_i+v_j \le c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Оскільки в прямій задачі умови-обмеження мають знак «=», то в двоїстій обмежень на знак змінних немає. Тому вектор змінних двоїстої задачі можна вибрати у вигляді

$$Y=\left(-u_1,\ldots,-u_m,v_1,\ldots,v_n\right).$$

Остаточно, двоїста задача має вигляд:

$$F(Y)=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j-\sum_{i=1}^{m} a_i u_i \to \max, \tag{7.10}$$

$$v_j-u_i \le c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \tag{7.11}$$

Означення 7.3. Змінна u_i називається *потенціалом пункту виробництва* P_i, $i=\overline{1,m}$, v_j - *потенціалом пункту споживання* Q_j, $j=\overline{1,n}$ відповідно.

Теорема 7.7. (*Двоїстості для Т-задачі*).
Для того, щоб пряма і двоїста Т-задачі мали оптимальні розв‘язки $X^*=\left(x_{ij}^*\right)_{i=\overline{1,m},\,j=\overline{1,n}}$ і $Y^*=\left(-u_1^*,\ldots,-u_m^*,v_1^*,\ldots,v_n^*\right)$ необхідно і достатньо, щоб було виконано умову балансу і при цьому

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^*=\sum_{j=1}^{n} b_j v_j^*-\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^*,$$

тобто

$$\min Z\left(X^*\right)=\max F\left(Y^*\right).$$

Економічна інтерпретація теореми. Сумарні транспортні витрати при оптимальному плані перевезень дорівнюють оптимальному зміненню сумарної вартості продукції при повному задоволенні попиту.

Теорема 7.8. (*Канонічна теорема рівноваги*).
Для того, щоб пара допустимих розв‘язків $X^*=\left(x_{ij}^*\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ і $Y^*=\left(-u_1^*,\ldots,-u_m^*,v_1^*,\ldots,v_n^*\right)$ прямої і двоїстої Т-задач були оптимальними розв‘язками, необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення:

1. Якщо $x_{ij}^*>0$, то $v_j^*-u_i^*=c_{ij}$.

2. Якщо $v_j^* - u_i^* < c_{ij}$, то $x_{ij}^* = 0$.

Економічна інтерпретація теореми. Різницю $v_j - u_i$ можна розглядати як приріст цінності одиниці продукції при перевезенні з пункту P_i в пункт Q_j. Тому, якщо $v_j^* - u_i^* < c_{ij}$, то перевезення з P_i в Q_j нерентабельне і $x_{ij}^* = 0$. Якщо $x_{ij}^* > 0$ (перевезення, що здійснюється в оптимальному плані), то $v_j^* - u_i^* = c_{ij}$, тобто перевезення з P_i в Q_j рентабельне.

7.9. Метод потенціалів

За теоремою рівноваги $v_j - u_i = c_{ij}, x_{ij} > 0$ і $v_j - u_i \le c_{ij}, x_{ij} = 0$.

Група рівностей

$$v_j - u_i = c_{ij}, x_{ij} > 0$$

використовується як система для знаходження потенціалів. Система має $m+n$ невідомих $u_i, i = \overline{1,m}, \; v_j, j = \overline{1,n}$. Кількість рівнянь системи дорівнює кількості базисних змінних $m+n-1$, отже система невизначена, тому одному з потенціалів надають довільного значення (зазвичай $=0$).

Група нерівностей

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0$$

використовується для перевірки оптимальності опорного розв‘язку.

Покладемо

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

Числа Δ_{ij} називаються оцінками вільних клітин таблиці (симплекс-різницями). В цьому випадку ознаку оптимальності можна сформулювати так само як і в симплекс-методі для задач на мінімум. Опорний розв‘язок є оптимальним, якщо для усіх векторів-умов (клітин таблиці) оцінки недодатні. Оцінки для вільних клітин використовують для покращення опорного плану. Для цього знаходять клітину (i_0, j_0), що відповідає $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{i_0 j_0}$. Якщо $\Delta_{i_0 j_0} \le 0$, то розв‘язок оптимальний. Якщо $\Delta_{i_0 j_0} > 0$, то для клітини (i_0, j_0) будуть цикл і покращують розв‘язок, перерозподіляючи вантаж на величину $\theta = \min\limits_{i,j;(i,j)\in C_-^0} \{x_{ij}\}$ за цим циклом.

Покажемо, що значення цільової функції зменшиться на величину $\theta\Delta_{i_0 j_0}$, тобто

$$Z(X') = Z(X) - \theta\Delta_{i_0 j_0}.$$

$\triangle$ Нехай цикл C^0 складають клітини $(i_0, j_0), (i_0, j_1), (i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_0)$. Позначимо через Z_0 - частину цільової функції Т-задачі, що не змінюється при переході від X до X'.

$$Z(X) = Z_0 + c_{i_0 j_1} x_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} x_{i_1 j_1} + \ldots + c_{i_k j_0} x_{i_k j_0}.$$

Тоді

$$Z(X') = Z_0 + c_{i_0 j_0}\theta + c_{i_0 j_1}\left(x_{i_0 j_1} - \theta\right) + c_{i_1 j_1}\left(x_{i_1 j_1} + \theta\right) + \ldots + c_{i_k j_0}\left(x_{i_k j_0} - \theta\right) =$$
$$= Z(X) + \theta\left(c_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_1} + c_{i_1 j_1} - \ldots - c_{i_k j_0}\right).$$

Всі доданки в дужках, крім першого відповідають базисним клітинам: $c_{ij} = v_j - u_i$. Тому

$$Z(X') = Z(X) + \theta\left(c_{i_0 j_0} - \left(v_{j_1} - u_{i_0}\right) + \left(v_{j_1} - u_{i_1}\right) - \ldots - \left(v_{j_0} - u_{i_k}\right)\right) =$$
$$= Z(X) + \theta\left(c_{i_0 j_0} - \left(v_{j_0} - u_{i_0}\right)\right) = Z(X) - \theta\Delta_{i_0 j_0}. \blacktriangle$$

7.10. Особливості розв‘язання Т-задачі з неправильним балансом

Ми розглядали тільки задачі з правильним балансом. Але на практиці частіше зустрічаються задачі з неправильним балансом.

1. Нехай

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Тоді частина запасів постачальників, а саме

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

залишиться не вивезеною.

Тому, в системі обмежень Т-задачі першу групу обмежень заміняють нерівністю

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = \overline{1, m}.$$

Для приведення Т-задачі до канонічного вигляду вводимо додаткові змінні $x_{1,n+1}, \ldots, x_{m,n+1}$.

Тоді

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1, m}.$$

Математична модель набуває вигляду

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n+1}.$$

Критерій розв‘язності задачі: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(a_i - x_{i,n+1}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j.$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = b_{n+1}.$$

Отже, необхідно увести фіктивного споживача з запитом b_{n+1} і нульовими вартостями перевезень одиниці вантажу $c_{i,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}.$

2. Аналогічно, якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

частина запитів споживачів

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

залишається незадоволеною.

В цьому випадку для розв‘язання задачі уводять фіктивного постачальника з запасами a_{m+1} і нульовими вартостями перевезень одиниці вантажу $c_{m+1,j} = 0,\ j = \overline{1,n}.$

При складанні опорного плану запаси фіктивного постачальника (запити фіктивного споживача) розподіляються (задовольняються) в останню чергу.

7.11. Алгоритм розв‘язання Т-задачі методом потенціалів

1. Перевіряють виконання критерію розв‘язності Т-задачі.

Для задач відкритого типу вводять фіктивного постачальника або споживача.

2. Будують початковий опорний план (методом північно-західного кута або мінімальної вартості) і перевіряють правильність побудови. Зайнятих клітин $m+n-1$, впевнюються в лінійній незалежності векторів-умов методом викреслювання.

3. Будують систему потенціалів, що відповідає опорному плану. Розв‘язують систему рівнянь

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0.$$

Одному з потенціалів надають довільного значення (частіше 0). Інші визначаються однозначно.

4. Перевіряють виконання умов оптимальності для вільних клітин таблиці. Для цього обчислюють оцінки для усіх вільних клітин за формулами

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$$

і ті з них, що більші нуля записують в ліві нижні кути клітини.

Якщо $\Delta_{ij} \le 0$ для вільних клітин, то розв‘язок оптимальний і знаходять $Z\left(X^*\right)$.

Якщо хоча б одна клітина має додатну оцінку, то опорний план не оптимальний.

5. Переходять до нового розв‘язку, на якому значення цільової функції буде меншим. Для цього вибирають клітину, якій відповідає найбільша додатна оцінка

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\left\{\Delta_{ij}\right\} = \Delta_{i_0 j_0}.$$

Будують цикл для цієї клітини – він єдиний. В клітинах циклу розставляють знаки «+» чи «-», починаючи з «+» в клітині $\left(i_0, j_0\right)$. Здійснюють зсув (перерозподіл вантажу) за циклом на величину $\theta = \min\limits_{i,j;(i,j)\in C_-^0}\left\{x_{ij}\right\}$. Клітина зі знаком «-», в якій міститься мінімальний вантаж, залишається порожньою. Якщо мінімум в декількох клітинах, то в інших записують базисні нулі. Число зайнятих клітин залишається рівним $m+n-1$.

Повертаються до пункту 3.

Приклад 7.1. Знайти розв‘язок транспортної задачі з даною матрицею перевезень (табл.7.2).

Таблиця 7.2.

№ 1	B1	B2	B3	B4	B5	**ai**
A1	14	10	16	22	3	**140**
A2	27	11	16	24	18	**150**
A3	20	3	9	15	7	**210**
bj	**120**	**90**	**110**	**100**	**80**	**500**

Побудуємо початковий опорний план методом північно-західного кута (табл.7.3).

Знаходимо значення цільової функції.

$$Z_1 = 120\cdot 14 + 20\cdot 10 + 70\cdot 11 + 80\cdot 16 + 30\cdot 9 + 100\cdot 15 + 80\cdot 7 = 6260.$$

Обчислюємо потенціали постачальників u_i (дописуємо в розподільчу таблицю останнім стовпцем) і споживачів v_j (дописуємо в таблицю останнім рядком).

$$v_j - u_i = c_{ij},\ x_{ij} > 0$$

$$v_j - u_i \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$$

Таблиця 7.3.

	B1	B2	B3	B4	B5	**ai**	**ui**
A1	120 [14]	20 [10]	[16]	[22]	[3]	**140**	-6
A2	[27]	70 [11]	80 [16]	[24]	[18]	**150**	-7
A3	[20]	[3]	30 [9]	100 [15]	80 [7]	**210**	**0**
bj	**120**	**90**	**110**	**100**	**80**	**500**	
vj	8	4	9	15	7		

1) Знаходимо для табл. 7.3. симплекс-різниці вільних клітин:

$$\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij},\ x_{ij} = 0\textbf{.}$$

$$\Delta_{13} = 9 + 6 - 16 = -1; \qquad \Delta_{14} = 15 + 6 - 22 = -1$$

$$\Delta_{15} = 7 + 6 - 3 = 10 > 0; \qquad \Delta_{21} = 8 + 7 - 27 = -12$$

$$\Delta_{24} = 15 + 7 - 24 = -2; \qquad \Delta_{25} = 7 + 7 - 18 = -4$$

$$\Delta_{31} = 8 - 0 - 20 = -12; \qquad \Delta_{32} = 4 - 0 - 3 = 1 > 0$$

Будуємо цикл для клітини (1,5): $\theta = \min\{20, 80, 80\} = 20$.

$$\boxed{+(\mathbf{1,5}) \to -(3,5) \to +(3,3) \to -(2,3) \to +(2,2) \to -(2,1) \to (1,5)}$$

Отримаємо таблицю 7.4.

Таблиця 7.4.

	B1	B2	B3	B4	B5	**ai**	**ui**
A1	120 [14]	[10]	[16]	[22]	20 [3]	**140**	4
A2	[27]	90 [11]	60 [16]	[24]	[18]	**150**	-7
A3	[20]	[3]	50 [9]	100 [15]	60 [7]	**210**	**0**
bj	**120**	**90**	**110**	**100**	**80**	**500**	
vj	18	4	9	15	7		

2) Знаходимо симплекс-різниці для вільних клітин таблиці 7.4 і обчислюємо значення цільової функції з перевіркою.

$$\Delta_{12} = 4 - 4 - 10 = -10; \qquad \Delta_{13} = 9 - 4 - 16 = -11$$

$$\Delta_{14} = 15 - 4 - 22 = -11; \qquad \Delta_{21} = 18 + 7 - 27 = -2$$

$$\Delta_{24} = 15 + 7 - 24 = -2; \qquad \Delta_{25} = 7 + 7 - 18 = -4$$

$$\Delta_{31} = 18 - 0 - 20 = -2; \qquad \Delta_{32} = 4 - 0 - 3 = 1 > 0$$

$Z_2 = Z_1 - 10 \cdot 20 = 6260 - 200 = 6060.$

$\left(Z_2 = 120 \cdot 14 + 20 \cdot 3 + 90 \cdot 11 + 60 \cdot 16 + 50 \cdot 9 + 100 \cdot 15 + 60 \cdot 7 = 6060\right).$

Будуємо цикл для (3,2): $\theta = \min\{50, 90\} = 50$

$$\boxed{+\mathbf{(3,2)} \to -(2,2) \to +(2,3) \to -(3,3) \to (3,2)}$$

Отримаємо таблицю 7.5.

Таблиця 7.5.

	B1	B2	B3	B4	B5	**ai**	**ui**
A1	120 [14]	[10]	[16]	[22]	20 [3]	**140**	4
A2	[27]	40 [11]	110 [16]	[24]	[18]	**150**	-8
A3	[20]	50 [3]	[9]	100 [15]	60 [7]	**210**	**0**
bj	**120**	**90**	**110**	**100**	**80**	**500**	
vj	18	3	8	15	7		

3) Перевіряємо потенціали вільних клітин.

$\Delta_{12} = 3 - 4 - 10 = -11;$ $\Delta_{13} = 8 - 4 - 16 = -12$

$\Delta_{14} = 15 - 4 - 22 = -11;$ $\Delta_{21} = 18 + 8 - 27 = -1$

$\Delta_{24} = 15 + 8 - 24 = -1;$ $\Delta_{25} = 7 + 8 - 18 = -3$

$\Delta_{31} = 18 - 0 - 20 = -2;$ $\Delta_{33} = 8 - 0 - 9 = -1$

Оцінки усіх вільних клітин від‘ємні, отже розв‘язок оптимальний.

Знаходимо оптимальне значення цільової функції.

$Z_{\min} = Z_3 = Z_2 - 50 \cdot 1 = 6060 - 50 = 6010.$

$Z_{\min} = Z_3 = 120 \cdot 14 + 20 \cdot 3 + 40 \cdot 11 + 110 \cdot 16 + 50 \cdot 3 + 100 \cdot 15 + 60 \cdot 7 = 6010.$

7.12. Альтернативний оптимум і виродженість в Т-задачі.

Ознакою альтернативного оптимуму в Т-задачі є рівність нулю хоча б однієї з оцінок вільних змінних в оптимальному плані X_1^*.

Виконавши перерозподіл вантажів відносно клітини, що має $\Delta_{ij} = 0$ одержимо новий оптимальний план X_2^*, при цьому значення цільової функції (транспортних витрат) не зміниться. Якщо одна оцінка вільних змінних дорівнює 0, то оптимальний план

$$X^* = \lambda X_1^* + (1 - \lambda) X_2^*, \ \ 0 \le \lambda \le 1.$$

Якщо при розв‘язанні Т-задачі число зайнятих клітин менше $m + n - 1$, то задача має вироджений розв‘язок.

Тоді в клітину вводять базисний нуль (справа або знизу від заповненої клітини, в якій потреби і запаси вичерпано одночасно), щоб базисних клітин було $m + n - 1$.