

Лекція 14

Синтез алгоритму цифрового автоматичного керування методом аналітичного конструювання стохастичного лінійного квадратичного гауссівського регулятора (ЛКГ - задача)

Розділ 14.1. Стохастична оптимальна ЦСАК в умовах точних вимірювань стану

Рівняння стану об'єкту керування та рівняння спостережень (МІМО ЛТІ - математична модель) мають вигляд:

$$\begin{cases} x(n+1) = A \cdot x(n) + B \cdot u(n) + w(n); \\ y(n) = C \cdot x(n), \end{cases} \quad (14.1)$$

де $x(n)$ – m - вимірний вектор стану системи; $u(n)$ – k - вимірний вектор керування системою; $w(n)$ – m - вимірний нормально розподілений збурюючий вплив (дискретний білий шум) з наступними характеристиками

$$E[w(n)] = 0; \quad E[w(i)w^T(j)] = W\delta(i-j); \quad \delta(i-j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad E[.] - \text{операція обчислення}$$

математичного сподівання; W – матриця розміру $m \times m$, яка є симетричною та додатньо напіввизначеною (властивість напіввизначеності матриці W позначається $W \geq 0$), на головній діагоналі матриці W розташовані дисперсії складових вектору $w(n)$, а інші елементи цієї матриці – це взаємні дисперсії (в багатьох випадках вони дорівнюють нулю); $w(n)$ – не залежить від $x(n)$.

Вважаємо, що матриці A та C , A та B , наведеної вище МІМО ЛТІ – математичної моделі, задовольняють вимогам щодо спостерігаємості та керованості системи.

В найпростішому випадку $C=I$ — одиночна матриця розміру $m \times m$.

З фізичної точки зору це означає, що кожна компонента вектору стану вимірюється і вимірюється без помилок. В інших випадках вважаємо, що C має таку розмірність та значення елементів які забезпечують спостерігаємість системи за допомогою спостерігача Льюїнбергера.

Початкова умова $x(0)$ — нормально розподілена векторна випадкова величина з наступними характеристиками:

$E[x(0)] = 0$; $E[x(0)x^T(0)] = X_0 > 0$ (цей запис означає, що матриця X_0 додатньовизначена).

Математична постановка задачі

Необхідно знайти таку послідовність керуючого впливу (система вважається повністю керованою), яка дозволяє із початкового стану $x(0)$ за кінцеву кількість кроків N перевести систему у стан $x(N) \approx 0$, мінімізуючи при цьому математичне сподівання квадратичного критерію якості:

$$I = E[I] = E \left[x^T(N) \cdot Q \cdot x(N) + \sum_{n=0}^{N-1} (x^T(n) \cdot Q \cdot x(n) + u^T(n) \cdot R \cdot u(n)) \right] =$$

$$= E \left[\|x(N)\|_Q^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (\|x(n)\|_Q^2 + \|u(n)\|_R^2) \right], \quad (14.2)$$

де Q - симетрична додатньонапіввизначена матриця вагових коефіцієнтів (властивість додатної напіввизначеності матриці Q позначається $Q \geq 0$);
 R - симетрична додатньовизначена матриця вагових коефіцієнтів (властивість додатної визначеності матриці R позначається $R > 0$).

Якщо мінімум критерію (14.2) існує, то виконується рівність

$$\min_{\substack{u(n) \\ n=0, N-1}} E[I] = E \left[\min_{\substack{u(n) \\ n=0, N-1}} I \right].$$

Це означає, що операції пошуку мінімуму та математичного сподівання комутативні (можливо переставити місцями послідовність виконання цих операцій і при цьому кінцевий результат не змінюється).

Висновок: управління $u(N-j) = -K(N-j)x(N-j)$ ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$), де $K(N-j)$ - коефіцієнт підсилення зворотного зв'язку, визначається так само як і в задачі

аналітичного конструювання дискретного детермінованого регулятора (ЛКР - задача).

Зауваження. При $N \rightarrow \infty$ отримуємо стаціонарний регулятор: $u(n) = -K_0 x(n)$, де $K_0 = \text{const}$.

Розділ 14.2. Стохастична оптимальна ЦСАК в умовах неточних вимірів (лінійна квадратична гауссівська задача (ЛКГ - задача))

Рівняння стану ОУ та рівняння спостереження мають вигляд стохастичної МІМО LTI - математичної моделі:

$$\begin{cases} x(n+1) = A \cdot x(n) + B \cdot u(n) + w(n); \\ y(n) = C \cdot x(n) + v(n), \end{cases} \quad (14.3)$$

де $w(n)$, $v(n)$ — нормально розподілені взаємно некорельовані дискретні білі шуми такі, що

$$E[w(n)] = 0; \quad E[v(n)] = 0$$

$$E \begin{bmatrix} w(i) \\ v(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(j) & v(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \cdot \delta(i-j) & 0 \\ 0 & V \cdot \delta(i-j) \end{bmatrix};$$

$W \geq 0; V > 0$ - це означає, що записані матриці є відповідно додатно напіввизначені та додатновизначені;

$E[v(i)v^T(j)] = V\delta(i-j)$; V - матриця дисперсій та взаємних дисперсій шумів спостереження;

$\delta(i-j)$ - дискретна імпульсна функція;

$w(n)$ та $v(n)$ — не залежать від $x(n)$;

$x(0)$ — початкова умова, яка задовольняє вимогам:

$$E[x(0)] = 0; \quad E[x(0) \cdot x^T(0)] = X_0 \geq 0 \quad (X_0 - \text{додатнонапіввизначена матриця}).$$

Математична постановка задачі. Знайти таке керування $u(n); n = \overline{0, N-1}$, яке дозволяє мінімізувати критерій:

$$I = E \left[I \Big|_{y(0), \dots, y(N-1)} \right] = E \left[x^T(N) \cdot Q \cdot x(N) + \sum_{n=0}^{N-1} (x^T(n) \cdot Q \cdot x(n) + u^T(n) \cdot R \cdot u(n)) \Big|_{y(0), \dots, y(N-1)} \right],$$

де $E[\dots|_{y(0),\dots,y(N-1)}]$ — символ операції обчислення умовного матричного сподівання, тобто математичне сподівання від квадратичного критерію при умові, що відбулися виміри $y(0),\dots,y(N-1)$.

Розв'язання задачі пошуку $u(n)$ може бути використано на основі використання методу стохастичного динамічного програмування, який базується на принципі оптимальності Беллмана.

Застосування методу стохастичного динамічного програмування базується, вимагає, так званого, інваріантного занурення наступних інтервалів оптимізації в попередні:

$$\begin{aligned} \min_{u(n)} E[I|_{y(0),\dots,y(n-1)}] &= x^T(0) \cdot Q \cdot x(0) + E \left[\min_{u(0)} (u^T(0) \cdot R \cdot u(0) + \right. \\ &+ x^T(1) \cdot Q \cdot x(1) + E \left[\min_{u(1)} (u^T(1) \cdot R \cdot u(1) + \right. \\ &+ x^T(2) \cdot Q \cdot x(2) + E \left[\min_{u(2)} (u^T(2) \cdot R \cdot u(2) + \right. \\ &+ x^T(3) \cdot Q \cdot x(3) + \dots + E \left[\min_{u(N-2)} (u^T(N-2) \cdot R \cdot u(N-2) + \right. \\ &+ x^T(N-1) \cdot Q \cdot x(N-1) + E \left[\min_{u(N-1)} (u^T(N-1) \cdot R \cdot u(N-1) + \right. \\ &+ x^T(N) \cdot Q \cdot x(N) \Big|_{y(0),\dots,y(N-1)} \Big] \Big|_{y(0),\dots,y(N-2)} \Big] \dots \Big|_{y(0),y(1),y(2)} \Big] \Big|_{y(0),y(1)} \Big] \Big|_{y(0)} \Big]. \end{aligned}$$

В результаті застосування методу стохастичного динамічного програмування отримуємо вираз для обчислення оптимального управління $\hat{u}(n) = -K(n) \cdot \hat{x}(n|_{n-1})$, де $\hat{x}(n|_{n-1})$ - оптимальна оцінка вектора стану об'єкту керування, яка обчислюється як умовне математичне сподівання $\hat{x}(n|_{n-1}) = E[x(n)|_{y(0),\dots,y(n-1)}]$; $K(n)$ – матричний коефіцієнт підсилення регулятора.

Матричний коефіцієнт $K(n)$ визначається за виразом

$$K(n) = (R + B^T \cdot \Omega(n+1) \cdot B)^{-1} \cdot \Omega(n+1) \cdot A,$$

який повністю співпадає за своєю структурою та складом змінних рівнянню для пошуку коефіцієнта підсилення в детермінованій задачі (задачі синтезу детермінованого лінійного квадратичного регулятора (див. лекцію 13)).

Матрицю $\Omega(n)$ обчислюємо шляхом розв'язання матричного рівняння Рікатті для дискретного часу

$$\Omega(n) = A^T \cdot \Omega(n+1) \cdot A + Q - K^T(n) \cdot (R + B^T \cdot \Omega(n+1) \cdot B) \cdot K(n),$$

$$\Omega(N) = Q.$$

Оптимальна оцінка $\hat{x}(n|_{n-1})$ обчислюється за допомогою алгоритму, який отримав назву оптимального дискретного фільтру або дискретного фільтру Калмана:

$$\hat{x}(n+1|_n) = A \cdot \hat{x}(n|_{n-1}) + B \cdot u(n) + H(n) \cdot (y(n) - C \cdot \hat{x}(n|_{n-1})),$$

де $H(n)$ — коефіцієнт підсилення оптимального спостерігача який обчислюється за допомогою рівнянь

$$H(n) = A \cdot S(n) \cdot C^T \cdot (V + C \cdot S(n) \cdot C^T)^{-1};$$

$$S(n+1) = (A - H(n) \cdot C) \cdot S(n) \cdot A^T + W.$$

Зауваження. На практиці в якості матричного коефіцієнта підсилення оптимального спостерігача та матричного коефіцієнта підсилення регулятора використовують їх сталі значення (тобто розглядають роботу систему керування і оптимального фільтру в сталому режимі, коли $N \rightarrow \infty$):

$$K(n) \cong K_0 = const \quad ma \quad H(n) \cong H_0 = const.$$

Це означає, стохастична цифрова система керування стає квазіоптимальною.

Висновок:

1. Для отримання оптимального закону керування (корегуючого зворотного зв'язку в ЛКГ- задачі) достатньо обчислити матричний коефіцієнт підсилення оптимального керування $K(n)$, вважаючи, що система детермінована.
2. Використати в законі керування оцінку стану системи, яку дає оптимальний спостерігач (оптимальний фільтр-екстраполятор з прогнозом на один крок).

3. Кажуть, що керування має властивість еквівалентності - керування еквівалентне детермінованому.
4. Кажуть, що в ЛКГ - задачі має місце властивість відокремлюваності - розділяють задачу на дві під задачі: пошук оцінки вектору стану системи за допомогою оптимального фільтру та пошук керування детермінованою системою, ви мір стану якої дорівнює вихідному сигналу копильного фільтру.

Факт того, що оптимальне управління в ЛКГ задачі має властивості відокремлюваності та еквівалентності носить назву теорема про відокремлюваність.

Розділ 14.3. Приклад синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом аналітичного конструювання стохастичного лінійного квадратичного гауссівського регулятора (ЛКГ - задача)

Поставимо за мету побудувати ЦСАК, що використовує алгоритми цифрового ПД-регулятора та цифрового лінійного квадратичного гауссівського регулятора (ЦЛКГР) для керування кутовою швидкістю ротора двигуна постійного струму.

В якості вихідних даних використаємо результат побудови дискретної МІМО ЛТІ - математичної моделі ДПС, що була побудована у розділі 11.2 (Лекція 11):

Математична модель ДПС у дискретному просторі станів

>> A=[0.1841 -0.2256;0.2256 0.9359]

>> B=[0.1504 0.04274;0.04274 -0.2928]

>> C=[1 0;0 1]

>> D=[0 0;0 0]

>> T_o=0.06.

Етапи методики синтезу

Етап1. Побудова алгоритму цифрового лінійного квадратичного регулятора (див. лекція 13).

Етап 2. Параметричне налаштування ЦПД - регулятора методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію (див. лекції 10, 13).

Етап 3. Синтез оптимального спостерігача стану.

Етап 4. Імітаційне моделювання процесу функціонування цифрового лінійного квадратичного гауссівського регулятора

Етап 5. Висновки.

Виконання етапів методики

Етап1

В якості прикладу задамо матриці Q та R у вигляді :

```
>> Q=[1 0;0 1];
```

```
>> R=[0.7 0;0 0.3];
```

.

Використовуючи систему комп'ютерної математики MATLAB+Simulink обчислимо сталий матричний коефіцієнт підсилення K_0 та матрицю P_0 за допомогою функції **dlqr** (див. лекція 13):

```
>> [Ko]=dlqr(Ad,Bd,Q,R)
```

```
Ko = [0.0731 0.0623;  
      - 0.2964 -1.1854]
```

Висновок:

коефіцієнт підсилення оптимального корегуючого зворотного зв'язку

```
Ko = [0.0731 0.0623; - 0.2964 -1.1854] .
```

Етап 2

Виконаємо комп'ютерне моделювання процесу функціонування ЦСАК, що складається із ЦПД – регулятора та цифрового лінійного квадратичного гауссівського регулятора, який корегує динамічні властивості об'єкта керування(див. рис. 14.1).

спостерігача отримуємо оцінку вектору стану ДПС (тобто найкращі у середньоквадратичному розумінні значення струму якоря та кутової швидкості його обертання). Оцінки вектору стану ДПС використовуємо для побудови зворотного зв'язку і подаємо на вхід ЦПД – регулятора, а також для корекції динамічних властивостей ДПС за допомогою цифрового лінійного квадратичного регулятора (див. рис. 14. 1).

Лістинг результату синтезу оптимального спостерігача стану системи (фільтру Калмана)

```
>>% Побудова неперервної математичної моделі ДПС
>> A=[-25 -7.5;7.5 0]
A =
   -25.0000   -7.5000
    7.5000     0
>> B=[5 0;0 -5]
B =
     5     0
     0    -5
>> C=[1 0]
C = 1     0
>> D=[0]
D = 0
>> sysn=ss(A,B,C,D);%Continuous-time model.
>>% матриці інтенсивностей збурень
>> W=[0.001 0;0 0.001]
W = 0.0010     0
     0  0.0010
>> V=[0.0001]
V = 1.0000e-004
>> [kest,Ho,P]=kalmd(sysn,W,RV,0.06)%Sampling time: 0.06. Discrete-time
model.
Ho=
    0.1688
   -0.3744
P =

    0.0008   -0.0012
   -0.0012    0.0053
```

Висновок:

коефіцієнт підсилення оптимального спостерігача

Ho = [0.1688; -0.3744].

Етап 4

Результат комп'ютерного моделювання процесу функціонування синтезованої ЦСАК, що використовує алгоритм ЦПД – регулятора та алгоритм цифрового лінійного квадратичного гауссівського регулятора представлено на рис. 14.2, 14.3 та 14.4 .

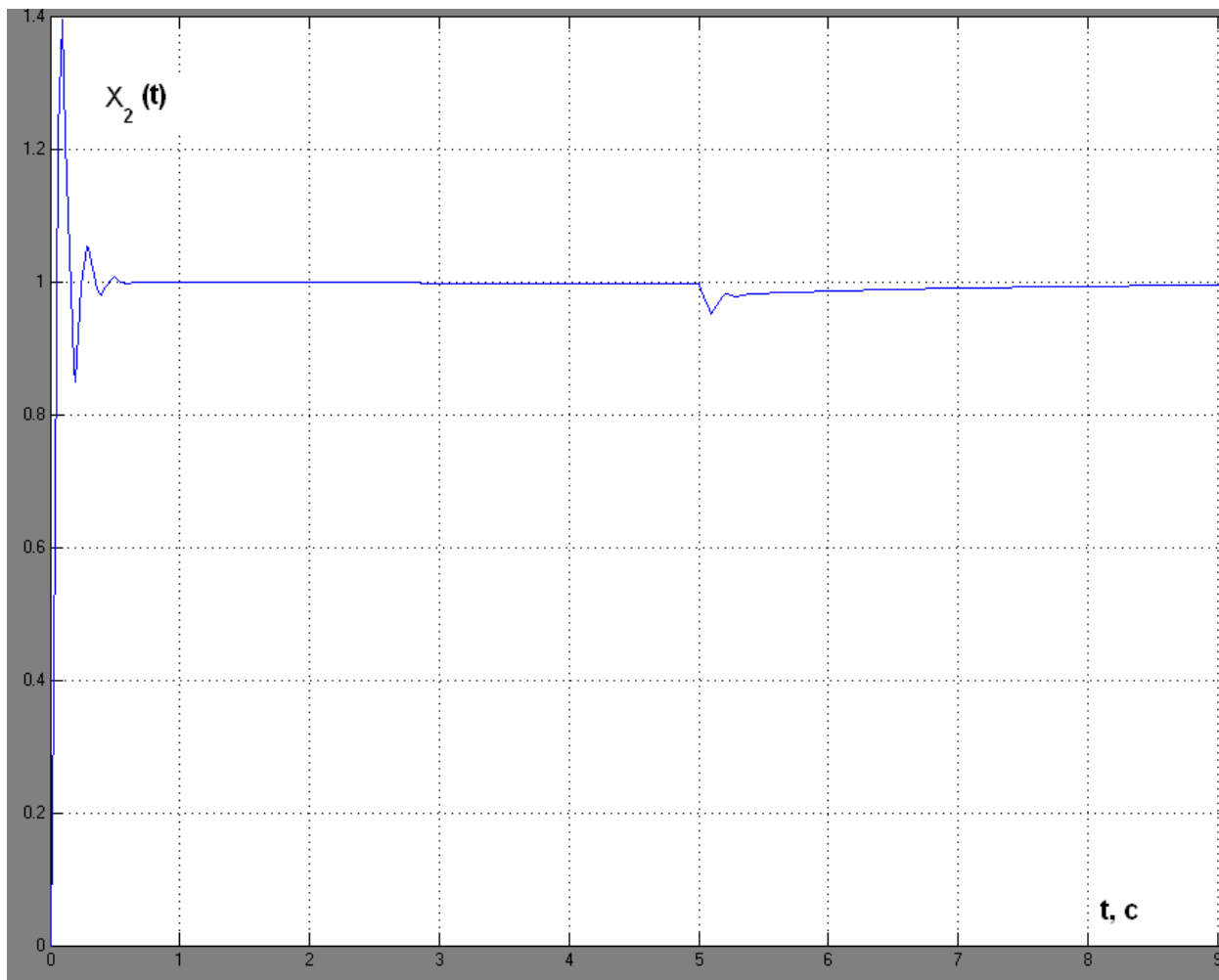


Рис. 14. 2. Графік зміни в часі кутової швидкості ротора ДПС $x_2(t)$ при відсутності стохастичної збурюючої дії (перемикачі підключення збурень Manual Switch 1, 2 перебувають у нижньому положенні (див. рис. 14.1); керуюча дія подається при $t=0$ с, детерміноване навантаження подається в момент часу $t=5$ с)

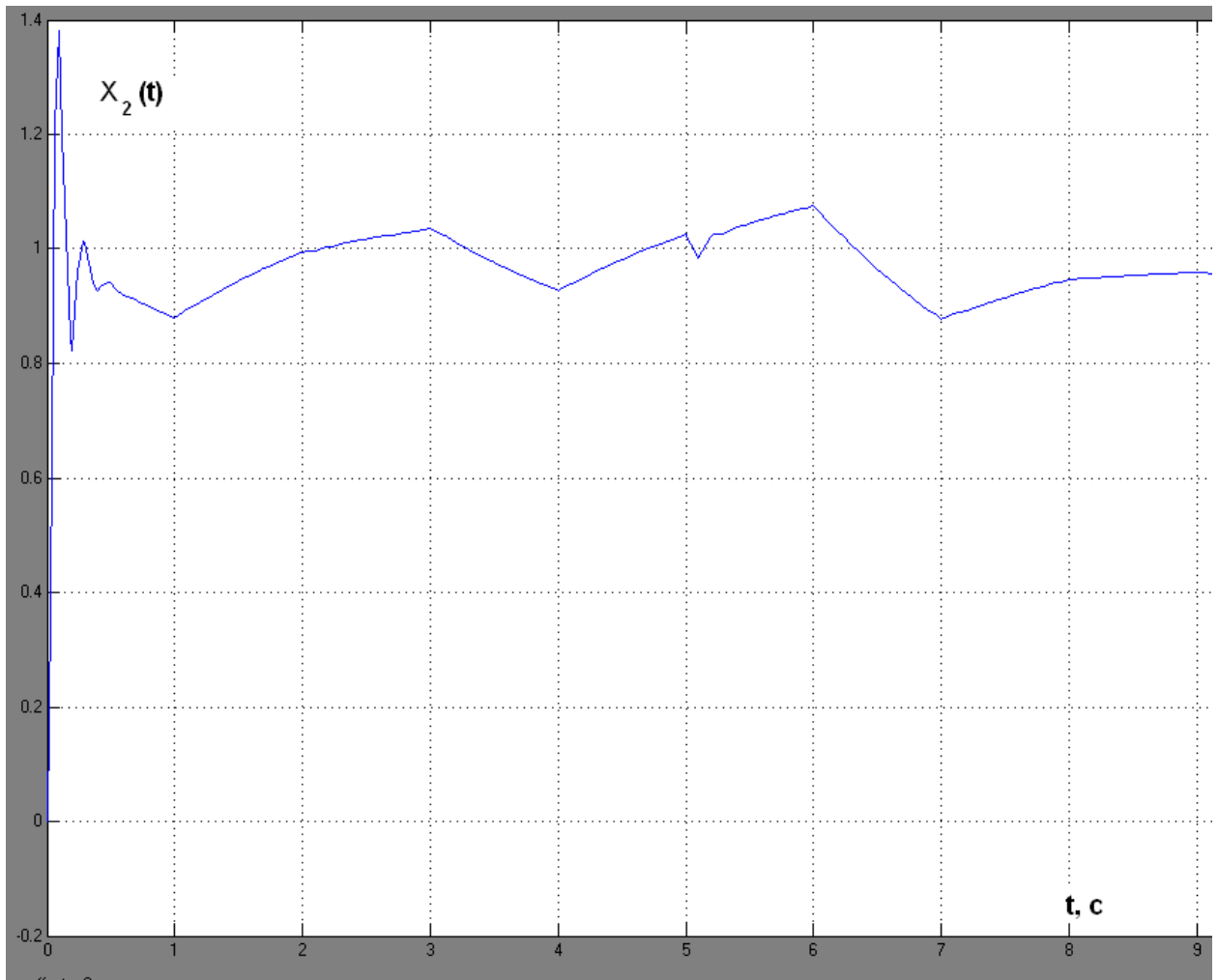


Рис. 14. 3. Графік зміни в часі кутової швидкості ротора ДПС $x_2(t)$ при дії на об'єкт керування стохастичного збурення та відсутності збурень у вихідному сигналі цифрового датчика струму якоря ДПС (перемикач Manual Switch 1 підключено у верхнє положення (див. рис. 14.1), а перемикач Manual Switch 2 перебуває у нижньому положенні (див. рис. 14.1); керуюча дія подається при $t=0$ с, детерміноване навантаження подається в момент часу $t=5$ с)

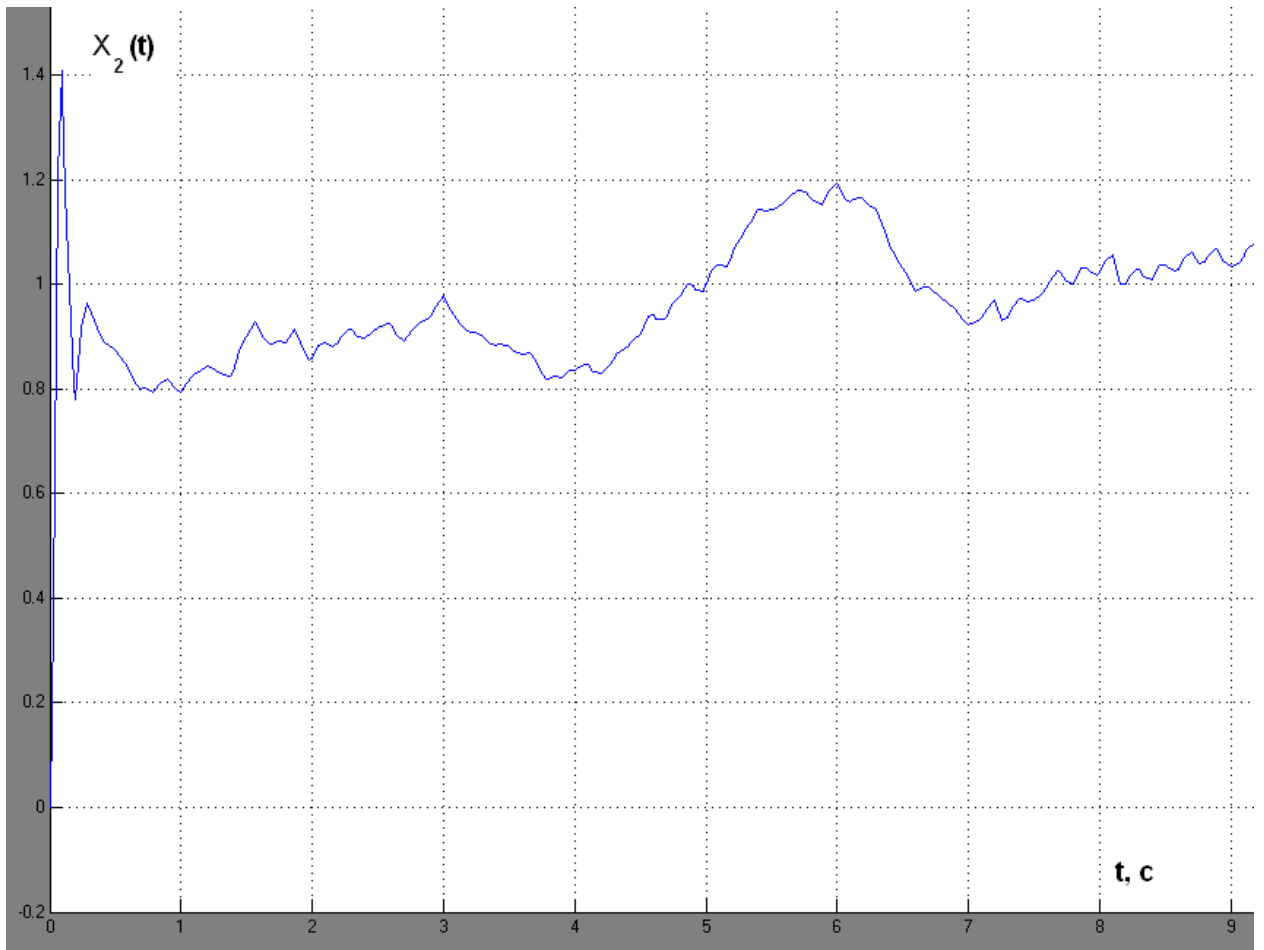


Рис. 14.4. *Графік зміни в часі кутової швидкості ротора ДПС $x_2(t)$ при дії стохастичних збурень на об'єкт керування та цифровий датчик струму якоря ДПС (перемикачі Manual Switch 1 та 2 підключено у верхнє положення (див. рис. 14.1); керуюча дія подається при $t=0$ с, детерміноване навантаження подається в момент часу $t=5$ с)*

Етап 5

За результатами імітаційного моделювання процесів у каналі керування швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС (див. рис. 14.2, 3, 4), можливо зробити наступні висновки.

1. Результати імітаційного комп'ютерного моделювання повністю підтвердили викладені у розділах 14.1 та 14.2 теоретичні положення.
2. Використання оптимального спостерігача стану дозволило алгоритмічно виміряти (оптимально оцінити) кутову швидкість ротора ДПС. Тобто, можна відмовитись від використання в ЦСАК окремого

апаратного засобу (цифрового тахогенератора), що робить систему більш надійною та менш дорогою. Крім того зменшуються габарити усього апаратного забезпечення ЦСАК.

3. Якщо ЦСАК перебуває під впливом випадкових збурень, то покращення її роботи можливо досягти шляхом використання у корегуючому зворотному лінійного квадратичного гауссівського регулятора та оптимального спостерігача стану.