

Лекція 13

Синтез алгоритму цифрового автоматичного керування методом аналітичного конструювання лінійного квадратичного регулятора (ЛКР - задача)

Розділ 13.1. Аналітичне конструювання дискретних детермінованих регуляторів із сталими параметрами у просторі станів

Виконаємо аналітичне визначення структури та обчислення параметрів (аналітичне конструювання) оптимального регулятора стану, який слідкує за початковими умовами.

Припустимо, що рівняння об'єкту керування у просторі станів має вигляд:

$$x(n+1) = A \cdot x(n) + B \cdot u(n), \quad (13.1)$$

де A, B – сталі матриці; $x(0)$ – відомі початкові умови; $u(n) = u_G(n)$ – корегуючий зворотний зв'язок.

Вважаємо, що всі змінні стану можливо точно виміряти. Потрібно знайти алгоритм ЦОМ (тобто побудувати регулятор), який обчислює такі керуючі сигнали $u(n)$ в залежності від вектора стану $x(n), n = \overline{0, N-1}$, що дозволяють перевести об'єкт керування в кінцевий стан $x(N)$ із початкового стану $x(0)$ і при цьому мінімізувати квадратичний критерій якості:

$$J = x^T(N) \cdot Q \cdot x(N) + \sum_{n=0}^{N-1} (x^T(n) \cdot Q \cdot x(n) + u^T(n) \cdot R \cdot u(n)), \quad (13.2)$$

де матриці Q, R – симетричні і відповідно додатньо-напіввизначені (квадратична форма $Z^T \cdot Q \cdot Z \geq 0 \quad \forall Z \in E^m \setminus \{0\}$) та додатньовизначені ($Z^T \cdot R \cdot Z > 0 \quad \forall Z \in E^m \setminus \{0\}$).

Вимоги до матриць Q та R впливають із необхідності існування єдиного глобального екстремуму критерію J та можливості виконання процедури обчислення точок екстремуму, тобто оптимальних значень

керування $\hat{u}(n), n = \overline{0, N-1}$, при яких критерій досягає свого мінімального значення

$$J_{\min} = \hat{x}^T(N) \cdot Q \cdot \hat{x}(N) + \sum_{n=0}^{N-1} (\hat{x}^T(n) \cdot Q \cdot \hat{x}(n) + \hat{u}^T(n) \cdot R \cdot \hat{u}(n)),$$

$$\partial_e \hat{x}(n+1) = A \cdot \hat{x}(n) + B \cdot \hat{u}(n), x(0) = x_0, n = \overline{0, N-1};$$

де $\hat{x}(n)$ – оптимальне значення вектору стану.

Поставлена задача відноситься до задач дискретної динамічної оптимізації. Її вирішення можливо отримати за допомогою методів:

- дискретного варіаційного обчислення;
- дискретного принципу максимуму Понтрягіна;
- дискретного динамічного програмування (принципу оптимальності Беллмана);
- достатніх умов Кротова за допомогою дискретної функції Кротова.

Для пошуку оптимального закону керування використаємо принцип оптимальності Беллмана:

- 1) кожен відрізок оптимальної траєкторії теж є оптимальним. Це означає, що, якщо відома кінцева точка траєкторії, оптимальна траєкторія може бути знайдена у зворотному напрямку (тобто від кінцевої точки до початкової);
- 2) сигнал керування $u(n)$ визначає наступні значення станів $x(n+1), x(n+2), \dots$. Таким чином, оптимальний сигнал керування $u(n)$ можливо визначити шляхом зворотного розрахунку.

Процедура розв'язання задачі полягає в наступному:

$$\min J = \min \left(x^T(0) \cdot Q \cdot x(0) + u^T(0) \cdot R \cdot u(0) + x^T(1) \cdot Q \cdot x(1) + u^T(1) \cdot R \cdot u(1) + \dots + x^T(N-2) \cdot Q \cdot x(N-2) + \right.$$

$$\left. + u^T(N-2) \cdot R \cdot u(N-2) + x^T(N-1) \cdot Q \cdot x(N-1) + u^T(N-1) \cdot R \cdot u(N-1) + x^T(N) \cdot Q \cdot x(N) \right) =$$

$$= x^T(0) Q x(0) + \min_{u(0) \in E^k} \left(u^T(0) \cdot R \cdot u(0) + x^T(1) \cdot Q \cdot x(1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \min_{u(1) \in E^k} \left(u^T(1) \cdot R \cdot u(1) + x^T(2) \cdot Q \cdot x(2) + \right. \\
& + \min_{u(2) \in E^k} \left(u^T(2) \cdot R \cdot u(2) + x^T(3) \cdot Q \cdot x(3) + \dots + \right. \\
& + \min_{u(N-2) \in E^k} \left(u^T(N-2) \cdot R \cdot u(N-2) + x^T(N-1) \cdot Q \cdot x(N-1) + \right. \\
& \left. \left. \left. + \min_{u(N-1) \in E^k} \left(u^T(N-1) \cdot R \cdot u(N-1) + x^T(N) \cdot Q \cdot x(N) \right) \right) \dots \right) \right).
\end{aligned}$$

Розглянемо останній доданок у записаному вище виразі. Підставимо у цей вираз

$$x(N) = A \cdot x(N-1) + B \cdot u(N-1)$$

та

$$x^T(N) = x^T(N-1) \cdot A + u^T(N-1) \cdot B \quad .$$

Позначимо :

$$\begin{aligned}
I_{N-1,N} & = \min_{u(N-1) \in E^k} \left(u^T(N-1) \cdot R \cdot u(N-1) + x^T(N-1) \cdot A^T \cdot Q \cdot A \cdot x(N-1) + \right. \\
& + u^T(N-1) \cdot B^T \cdot Q \cdot B \cdot u(N-1) + \\
& + x^T(N-1) \cdot A^T \cdot Q \cdot B \cdot u(N-1) + u^T(N-1) \cdot B^T \cdot Q \cdot A \cdot x(N-1) = \\
& = x^T(N-1) \cdot A^T \cdot Q \cdot A \cdot x(N-1) + \\
& \left. + \min_{u(N-1) \in E^k} \left(u^T(N-1) \cdot (R + B^T \cdot Q \cdot B) \cdot u(N-1) + 2 \cdot x^T(N-1) \cdot A^T \cdot Q \cdot B \cdot u(N-1) \right) \right).
\end{aligned}$$

Для пошуку точки мінімуму отриманого виразу необхідно і достатньо обчислити від цього виразу похідні за векторним аргументом, які в точці мінімуму повинні задовольняти системи рівнянь

$$\frac{\partial I_{N-1,N}}{\partial u(N-1)} = 0$$

та умові додатної визначеності матриці

$$\frac{\partial^2 I_{N-1,N}}{\partial (u(N-1))^2} > 0.$$

Використовуючи правила обчислення похідних від векторів та матриць за векторним аргументом отримаємо

$$\frac{\partial I_{N-1,N}}{\partial u(N-1)} = 2 \cdot B^T \cdot Q \cdot A \cdot x(N-1) + 2 \cdot (R + B^T \cdot Q \cdot B) \cdot u(N-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(N-1) = -(R + B^T \cdot Q \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot Q \cdot A \cdot x(N-1).$$

Умова додатної визначеності матриці $\frac{\partial^2 I_{N-1,N}}{\partial (u(N-1))^2}$ матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 I_{N-1,N}}{\partial (u(N-1))^2} = R + B^T Q B > 0.$$

Позначимо :

$$K(N-1) = (R + B^T \cdot Q \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot Q \cdot A.$$

Тоді

$$u(N-1) = -K(N-1) \cdot x(N-1).$$

Підставимо знайдене значення $u(N-1)$ у вираз для $I_{N-1,N}$ і отримаємо:

$$I_{N-1,N} = x^T(N-1) \cdot P_{N-1,N} \cdot x(N-1), \text{ де } P_{N-1,N} = A^T \cdot Q \cdot A - K^T \cdot (N-1) \cdot (R + B^T \cdot Q \cdot B) \cdot K(N-1).$$

Позначимо $I_{N-2,N} = \min_{u(N-2) \in E^k} (u^T(N-2) \cdot R \cdot u(N-2) + x^T(N-1) \cdot (Q + P_{N-1,N}) \cdot x(N-1))$.

Підставимо $x(N-1) = A \cdot x(N-2) + B \cdot u(N-2)$ в отриманий вираз для $I_{N-2,N}$ та виконаємо всі операції мінімізації . Отримаємо:

$$u(N-2) = -K(N-2) \cdot x(N-2),$$

$$\text{де } K(N-2) = (R + B^T \cdot P_{N-1} \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P_{N-1} \cdot A;$$

$$P_{N-1} = Q + P_{N-1,N};$$

$$I_{N-2,N} = x^T(N-2) \cdot P_{N-2,N} \cdot x(N-2);$$

$$P_{N-2,N} = A^T \cdot P_{N-1} \cdot A - K^T(N-2) \cdot (R + B^T \cdot P_{N-1} \cdot B) \cdot K(N-2) \text{ і т.д.}$$

Виконуючи в подальшому аналогічні обчислення отримаємо наступні узагальнені вирази для пошуку оптимального керування

$$\hat{u}(N-j) = -K(N-j) \cdot \hat{x}(N-j),$$

$$K(N-j) = (R + B^T \cdot P_{N-j+1} \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P_{N-j+1} \cdot A,$$

$$P_{N-j} = Q + A^T \cdot P_{N-j+1} \cdot A - K^T(N-j) \cdot (R + B^T \cdot P_{N-j+1} \cdot B) \cdot K(N-j),$$

$$P_N = Q,$$

де $q = N - j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) - зворотній час.

Якщо в вираз для обчислення P_{N-j} підставити $K(N - j)$, то отримаємо так зване різницеве матричне рівняння Рікати:

$$P_{N-j} = Q + A^T \cdot P_{N-j+1} \cdot \left(I - B \cdot (B^T \cdot P_{N-j+1} \cdot B + R)^{-1} \cdot B^T \cdot P_{N-j+1} \right) \cdot A.$$

Мінімальне значення показника якості обчислюється за виразом

$$J_{\min} = \min_{u(n) \in E^k} J = x^T(0) \cdot P_0 \cdot x(0).$$

Як бачимо J_{\min} є функцією початкового стану та P_0 .

Мінімальне значення критерію та матриця коефіцієнтів підсилення можуть бути обчислені заздалегідь за відомими параметрами системи A , B та ваговими матрицями Q , R і початковими умовами $x(0)$ із використанням різницевого матричного рівняння Рікати. Значення елементів матриці зворотного зв'язку $K(N - j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) або запам'ятовують, або апроксимують, як функцію прямого дискретного часу наближеними залежностями, і використовують під час функціонування ЦСАК в реальному часі.

Якщо $N \rightarrow \infty$, то $K(N - j + 1) \rightarrow K_0 = const$, тобто, значення елементів матриці підсилення сходиться до фіксованих значень. Наближення до фіксованих значень відбувається у зворотному часі

$K(q) \cong K(q-1) \cong K(q-2) \cong \dots \cong K(0)$, де $q \ll N$. Значення елементів матриці $K(N - j)$ залишаються майже не змінними. Зміни починаються приблизно за 10...15 кроків до закінчення процесу керування, тобто $q = N - (10 \div 15)$.

Висновок

Можливо побудувати квазіоптимальний регулятор із сталим матричним коефіцієнтом підсилення :

$$u(n) = -K_0 \cdot x(n),$$

$$\text{де } K_0 = (R + B^T \cdot P_0 \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot P_0 \cdot A;$$

$$P_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} P(N - j) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_0 = Q + A^T \cdot P_0 \cdot (I - B \cdot (B^T \cdot P_0 \cdot B + R)^{-1} \cdot B^T \cdot P_0) \cdot A.$$

Записане вище рівняння – це алгебраїчне рівняння Ріккати, розв’язок якого, за звичай, отримують у результаті розв’язання рекурентного рівняння Ріккати із початковою умовою $P_N = Q$.

Підкреслимо, що при розв’язанні рекурентного рівняння Ріккати необхідно виконувати пошук зворотної матриці, яка повинна існувати для всіх $N-j+1$, що забезпечується тим що $R > 0$ (R – додатньовизначена матриця)

При практичному застосуванні ЛКР – регулятора найчастіше використовується квазіоптимальний регулятор із сталим матричним коефіцієнтом підсилення K_0 .

Розділ 13.2. Приклад синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом аналітичного конструювання лінійного квадратичного регулятора (ЛКР - задача)

Поставимо за мету побудувати ЦСАК, що використовує алгоритми цифрового ПД-регулятора та цифрового лінійного квадратичного регулятора (ЦЛКР) для керування кутовою швидкістю ротора двигуна постійного струму.

В якості вихідних даних використаємо результат побудови дискретної МІМО ЛТІ - математичної моделі ДПС, що була побудована у розділі 11.2 (Лекція 11):

Математична модель ДПС у дискретному просторі станів

$$\gg A = [0.1841 \quad -0.2256; 0.2256 \quad 0.9359]$$

```
>> B=[0.1504 0.04274;0.04274 -0.2928]
```

```
>>C=[1 0;0 1]
```

```
>>D=[0 0;0 0]
```

```
>>To=0.06.
```

Етапи методики синтезу

Етап1. Побудова алгоритму цифрового лінійного квадратичного регулятора.

Етап 2. Параметричне налаштування ЦПД - регулятора методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію (див. Лекція 10).

Етап 3. Імітаційне моделювання та порівняльний аналіз результатів синтезу ЦСАК.

Етап 4. Висновки.

Виконання етапів методики

Етап1.

В якості прикладу задамо матриці Q та R у вигляді :

```
>> Q=[1 0;0 1];
```

```
>> R=[0.7 0;0 0.3];
```

Використовуючи систему комп'ютерної математики MATLAB+Simulink обчислимо сталий матричний коефіцієнт підсилення K_0 та матрицю P_0 за допомогою функції **dlqr** :

Лістинг командного вікна MATLAB

```
>> A=[0.1841 -0.2256;0.2256 0.9359]
```

```
A = 0.1841 -0.2256
```

```
    0.2256  0.9359
```

```
>> B=[0.1504 0.04274;0.04274 -0.2928]
```

```
B = 0.1504  0.0427
```

```
    0.0427 -0.2928
```

```
>> Q=[1 0;0 1]
```

```
Q = 1  0
```

```
    0  1
```

```
>> R=[0.7 0;0 0.3]
```

```
R = 0.7000 0  
0 0.3000
```

```
>> [Ko, Po]=dlqr(A,B,Q,R)
```

```
Ko = 0.0731 0.0623  
-0.2964 -1.1854
```

```
Po = 1.1215 0.2625  
0.2625 2.1414
```

Етап 2

Виконаємо комп'ютерне моделювання процесу функціонування ЦСАК, що складається із ЦПД – регулятора та лінійного квадратичного регулятора, який корегує динамічні властивості об'єкта керування(див. рис. 13.1).

Застосування комп'ютерної математичної моделі дозволяє виконати Параметричне налаштування ЦПД - регулятора методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію (див. лекція 10).

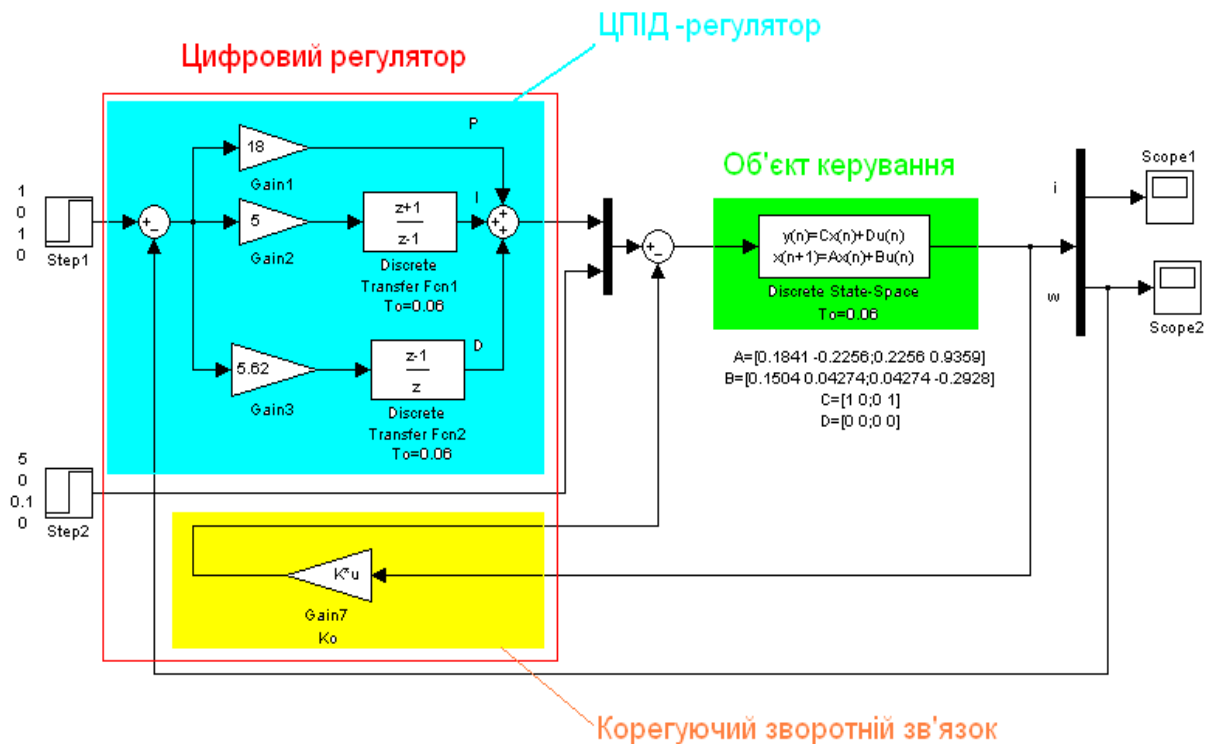


Рис. 13.1. Комп'ютерна математична модель модернізованого ЦСАК, цифровий регулятор якої складається із лінійного квадратичного регулятора, що корегує динамічні властивості об'єкта керування (корегуючий зворотній зв'язок) та ЦПД-регулятора

Етап 3.

Якість функціонування синтезованої ЦСАК, що використовує алгоритм ЦПД – регулятора та алгоритм цифрового лінійного квадратичного регулятора, порівнювалась із якістю функціонування ЦСАК, що використовує алгоритм ЦПД – регулятора та алгоритм цифрового модального регулятора (див. лекція 12).

Результат імітаційного комп'ютерного експерименту представлено на рис. 13.2.

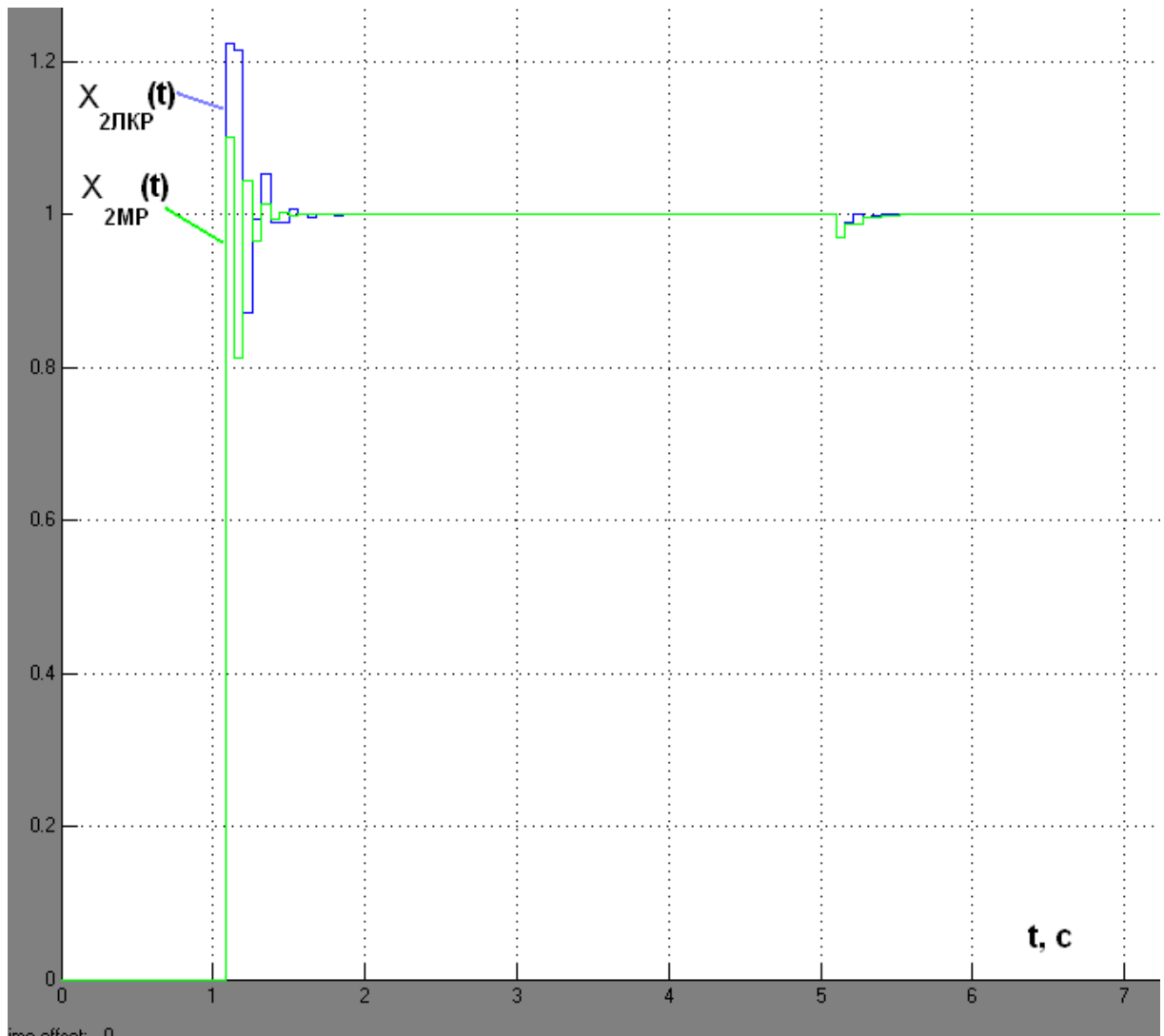


Рис. 13.2. Перехідні процеси за швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС в ЦСАК із ЦПД – регулятором та лінійним квадратичним регулятором $x_{2ЛКР}(t)$ та в ЦСАК із ЦПД – регулятором та модальним регулятором $x_{2МР}(t)$

Етап 4.

За результатами порівняльного аналізу перехідних процесів у каналі керування швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС (див. рис. 13.2), можливо зробити наступні висновки.

1. Результати порівняльного комп'ютерного моделювання повністю підтвердили викладені у розділах 13.1-13.2 теоретичні положення.
2. Корекція динамічних властивостей об'єкта керування за допомогою лінійного квадратичного регулятора дозволила:
 - забезпечити той самий час тривалості перехідного процесу , що і у випадку застосування модального регулятора (приблизно 0.5 с);
 - зменшити приблизно у двічі коливальність порівняно із випадком корекції динамічних властивостей об'єкту керування за допомогою модального регулятора.
3. Якщо ЦСАК перебуває під впливом випадкових збурень, то подальше покращення її роботи можливо досягти шляхом використання у корегуючому зворотному лінійного квадратичного гауссівського регулятора та оптимального спостерігача стану(див. лекції 14).