

Лекція 12

Синтез алгоритму цифрового автоматичного керування методом модального регулювання

Розділ 12.1. Теоретичні основи синтезу модального регулятора стану

При керуванні станом, яке забезпечує наближення характеристичного рівняння замкненої ЦСАК до бажаного за допомогою зворотнього зв'язку за станом, відбувається вплив на коефіцієнти характеристичного рівняння, через які в свою чергу забезпечується вплив на розташування **усіх полюсів** (коренів характеристичного рівняння). Тобто відбувається **корекція динамічних властивостей** замкненої ЦСАК.

Розглянемо умови такої побудови зворотнього зв'язку, при якій можливо впливати на розташування кожного окремого кореня (моди) характеристичного рівняння ЦСАК на комплексній площині z , де відображаються корені характеристичного рівняння. Таке керування отримало назву **модального керування (регулювання)**.

В загальному випадку у просторі станів рівняння ЦСАК має вигляд:

$$\begin{cases} x(n+1) = A \cdot x(n) + B \cdot u(n), \\ y(n) = C \cdot x(n), n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Припустимо, що всі особисті значення матриці A , що знайдені із характеристичного рівняння $\det(z \cdot I - A) = 0$, різні і дорівнюють: λ_i ($i = \overline{1, m}$).

Обчислимо матрицю лінійного перетворення T , яка дозволяє

діагоналізувати матрицю системи $A_T = \Lambda = T \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix}$.

Використовуючи лінійне перетворення, побудуємо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x_T(n) = T \cdot x(n); \\ x_T(n+1) = A_T \cdot x_T(n) + B_T \cdot u(n); \\ y(n) = C_T \cdot x_T(n), \end{cases}$$

де $B_T = T \cdot B$, $C_T = C \cdot T^{-1}$, T – квадратна неособлива матриця.

Підкреслимо те, що еквівалентність систем полягає в тому, що корені характеристичного рівняння $\det(z \cdot I - A_T) = \det(z \cdot I - \Lambda) = 0$ співпадають із коренями характеристичного рівняння: $\det(z \cdot I - A) = 0$. Сформулюємо вектор корегуючого керування $u_T(n) = B_T \cdot u_G(n)$ у вигляді: $u_T(n) = -K \cdot x_T(n)$, де

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{mm} \end{bmatrix}.$$

Тоді, можливо записати рівняння для змінної $x_T(n+1)$:
 $x_T(n+1) = \Lambda \cdot x_T(n) - K \cdot x_T(n) = (\Lambda - K) \cdot x_T(n)$,

$$\text{де } \Lambda - K = \begin{bmatrix} \lambda_1 - k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - k_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m - k_{mm} \end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння скорегованої ЦСАК набуває вигляду:
 $\det(z \cdot I - (\Lambda - K)) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det \left(\begin{bmatrix} z - (\lambda_1 - k_{11}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z - (\lambda_2 - k_{22}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z - (\lambda_m - k_{mm}) \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z - (\lambda_1 - k_{11})) \cdot (z - (\lambda_2 - k_{22})) \cdot \dots \cdot (z - (\lambda_m - k_{mm})) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \lambda_1 - k_{11}, \\ z_2 = \lambda_2 - k_{22}, \\ \dots \\ z_m = \lambda_m - k_{mm}. \end{cases}$$

Як бачимо, є можливість змінювати кожен корінь характеристичного рівняння окремо від інших за допомогою коефіцієнтів зворотного зв'язку k_{ii} ($i = \overline{1, m}$).

Висновок: скорегована ЦСАК складається із m незалежних контурів управління 1-го порядку.

Покладаємо, що $z_i = z_{iB}$, де z_{iB} – бажані значення коренів характеристичного рівняння скорегованої ЦСАК, і далі обчислюємо коефіцієнти зворотного зв'язку $k_{ii} = \lambda_i - z_{iB}$, $i = \overline{1, m}$, які визначають матрицю зворотного зв'язку K та дозволяють обчислити вектор керування $u_T(n) = -K \cdot x_T(n)$.

Для керування реальним об'єктом необхідно знайти реальний вектор корегуючого керування $u_G(n)$ із співвідношення $u_T(n) = B_T \cdot u_G(n) \Leftrightarrow u_G(n) = B_T^{-1} \cdot u_T(n) = (T \cdot B)^{-1} \cdot u_T(n) = B^{-1} \cdot T^{-1} \cdot u_T(n)$.

Висновок: матриця B повинна бути квадратною та не виродженою (розміром $m \times m$). З фізичної точки зору це означає, що в об'єкті керування є m різних керуючих входів: кількість керуючих змінних дорівнює порядку математичної моделі об'єкта керування.

Для реалізації алгоритму модального керування (формування сигналу зворотного зв'язку, який корегує динамічні властивості об'єкта керування) необхідно послідовно виконати три математичні операції (див. рис. 12.1).

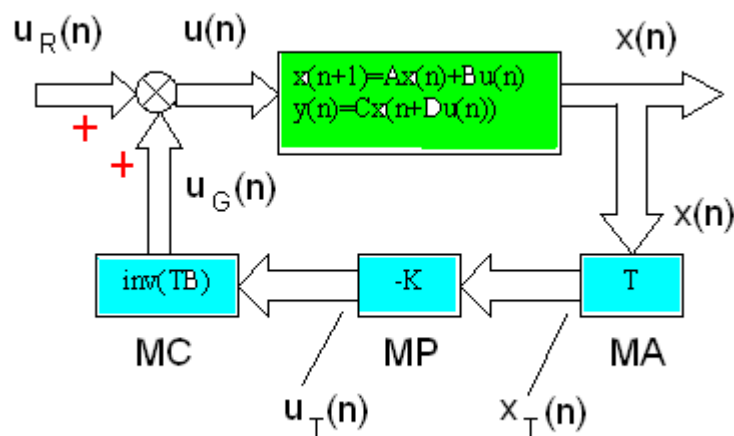


Рис. 12. 1. Структурна схема алгоритму модального керування:

МА- модальний аналізатор; МР – модальний регулятор;

МС – модальний синтезатор; $u(n) = u_R(n) + u_G(n)$ - управляючий сигнал на вході об'єкта керування; $u_R(n)$ - регулюючий сигнал, який задає (регулює) положення об'єкту керування у просторі станів; $u_G(n)$ - сигнал на виході алгоритму модального керування (корегує динамічні властивості об'єкту керування); C – одинична матриця розміру 2×2 ; D – матричний нуль розміру 2×2

Першу математичну операцію виконує модальний аналізатор (МА) - перетворює реальні виміри вихідних координат вектору стану об'єкту керування у віртуальні виміри в уявному просторі.

Другу математичну операцію виконує модальний регулятор (МР) - обчислює віртуальний вектор управління.

Третю математичну операцію виконує модальний синтезатор (МС) - обчислює реальний вектор управління.

Якщо в об'єкт керування має лише $l < m$ входів, то незалежно змінити можливо лише l особистих значень матриці A , за допомогою матриці зворотного зв'язку K розміру $l \times l$, наблизивши їх до бажаних значень.

Підкреслимо, що модальне управління успішно застосовується до керування об'єктами із розподіленими параметрами.

Розділ 12.2. Приклад синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом модального регулювання

Поставимо за мету побудувати ЦСАК, що використовує алгоритми цифрового ПІД-регулятора та цифрового модального регулятора для керування кутовою швидкістю ротора двигуна постійного струму.

В якості вихідних даних використаємо результат побудови дискретної МІМО ЛТІ - математичної моделі ДПС, що була побудована у розділі 11.2 (Лекція 11):

Математична модель ДПС у дискретному просторі станів

```
>> A=[0.1841 -0.2256;0.2256 0.9359]
```

```
>> B=[0.1504 0.04274;0.04274 -0.2928]
```

```
>> C=[1 0;0 1]
```

```
>> D=[0 0;0 0]
```

```
>> To=0.06.
```

Етапи методики синтезу

Етап1. Побудова алгоритму модального аналізатора.

Етап 2. Побудова алгоритму модального регулятора.

Етап 3. Побудова алгоритму модального синтезатора.

Етап 4. Параметричне налаштування ЦПД - регулятора методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію (див. Лекція 10).

Етап 5. Імітаційне моделювання та порівняльний аналіз результатів синтезу ЦСАК.

Етап 6. Висновки.

Виконання етапів методики

Етап 1.

Використовуючи систему комп'ютерної математики MATLAB+Simulink обчислимо матрицю лінійного перетворення T , яка дозволяє діагоналізувати матрицю системи A :

```
>> [V,Diag]=eig(A)
V = -0.9487  0.3163
     0.3163 -0.9487
Diag = [ 0.2593    0;
        0  0.8607]
>> T=inv(V)
T = [-1.1860 -0.3955;-0.3955 -1.1860].
```

Етап 2.

Задамо бажані значення коренів характеристичного рівняння математичної моделі скорегованого об'єкта керування. Припустимо, що бажані значення коренів дорівнюють 0.5. Тоді матричний коефіцієнт підсилення модального регулятора обчислюється за виразом

```
>> K05m=Diag-[0.5 0;0 0.5]
K05m = [-0.2407    0;0  0.3607].
```

Етап 3.

Матричний коефіцієнт підсилення модального синтезатора обчислюється за допомогою функції системи комп'ютерної математики MATLAB+Simulink

inv:

$$(T \cdot B)^{-1} = \text{inv}(T \cdot B)$$

Етап 4.

Виконаємо комп'ютерне моделювання процесу функціонування ЦСАК, що складається із ЦПД – регулятора та модального регулятора корекції динамічних властивостей об'єкта керування(див. рис. 12.2).

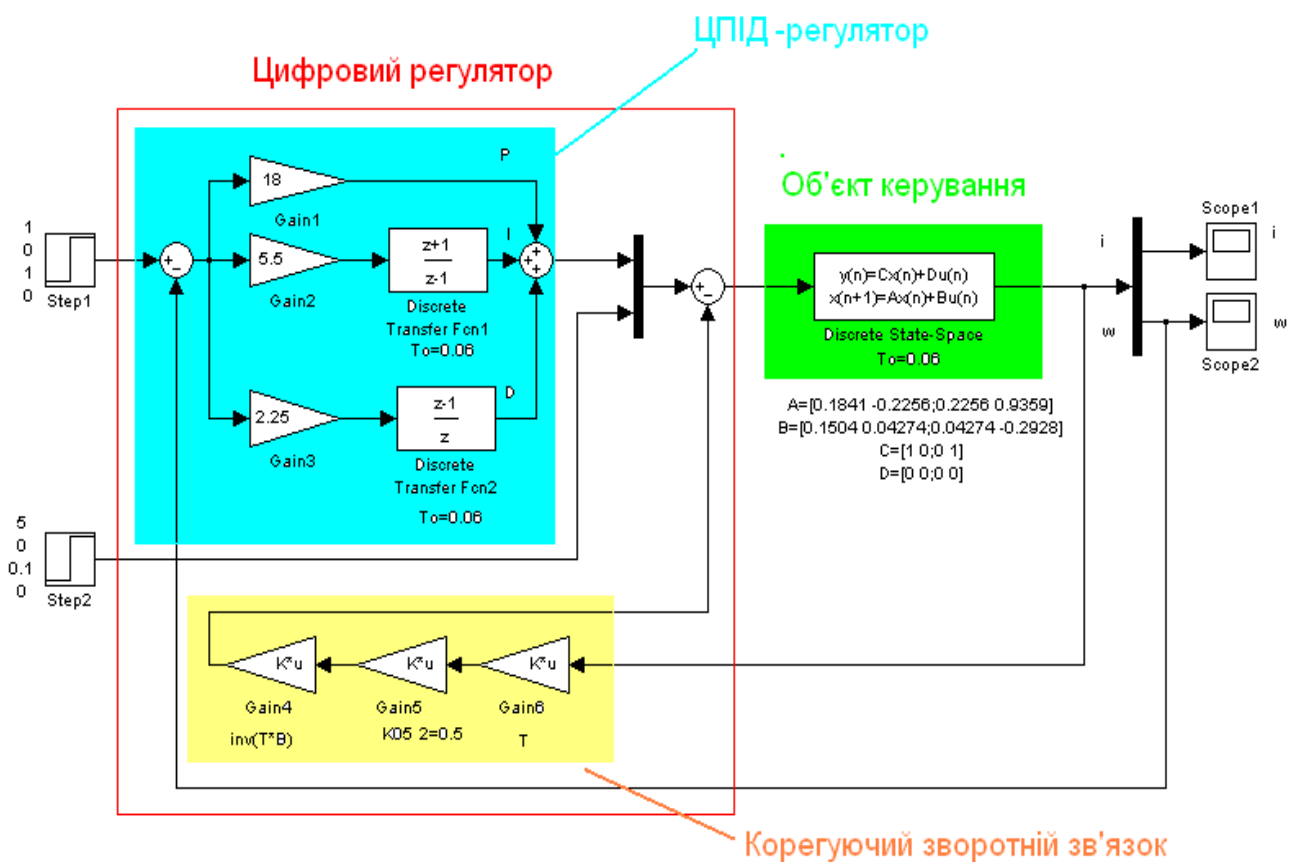


Рис. 12.2. Комп'ютерна математична модель модернізованої ЦСАК, цифровий регулятор якої складається із модального регулятора, що корегує динамічні властивості об'єкта керування (корегуючий зворотній зв'язок) та ЦПД-регулятора

Етап 5.

Якість функціонування синтезованої ЦСАК, що використовує алгоритм ЦПД – регулятора та алгоритм цифрового модального регулятора, порівнювалась із якістю функціонування ЦСАК, що використовує алгоритм

ЦПД – регулятор та алгоритм корекції динамічних властивостей об’єкта керування, який синтезовано методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння (див. розділ 11.4 лекції 11), та із якістю функціонування ЦСАК, що використовує лише алгоритм ЦПД – регулятора (див. розділ 11.4 лекції 11).

Результат імітаційного комп’ютерного експерименту представлено на рис. 12.3.

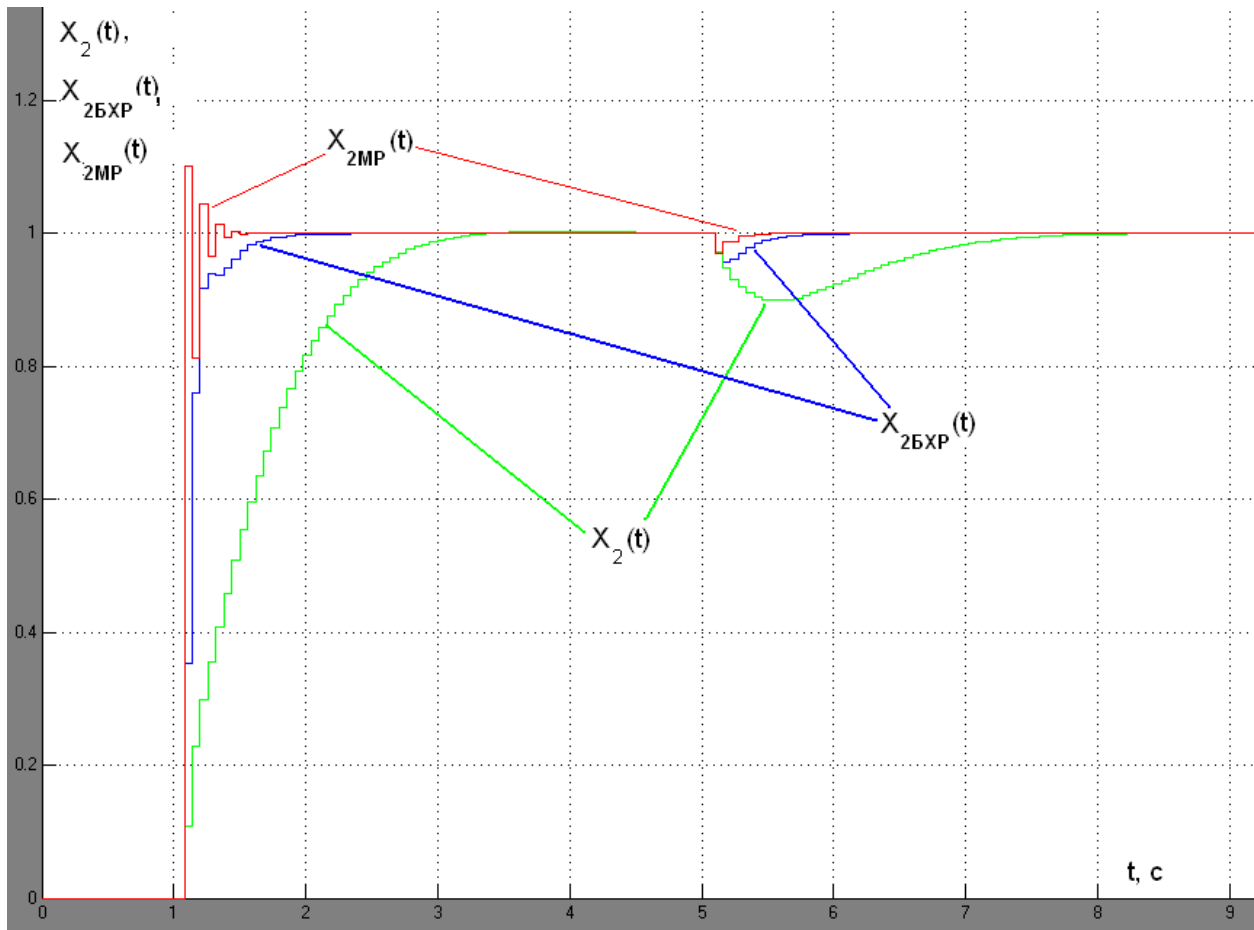


Рис. 12.3. Перехідні процеси за швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС в ЦСАК із ЦПД – регулятором $x_2(t)$, в ЦСАК із алгоритмом цифрового автоматичного керування, який синтезовано методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння $x_{2BXP}(t)$ та в ЦСАК із ЦПД – регулятором та модальним регулятором $x_{2MP}(t)$

Етап 6.

За результатами порівняльного аналізу перехідних процесів у каналі керування швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС (див. рис. 12.3), можливо зробити наступні висновки.

1. Результати порівняльного комп'ютерного моделювання повністю підтвердили викладені у розділах 12.1-12.2 положення.
2. Корекція динамічних властивостей об'єкта керування за допомогою модального регулятора дозволила:
 - зменшити час тривалості перехідного процесу порівняно із випадком корекції динамічних властивостей методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння з 1 с до 0.5 с, тобто майже у два рази;
 - зменшити амплітуду негативного «сплеску» швидкості в момент часу дії збурення приблизно на 30%.
3. Подальше вдосконалення ЦСАК можливо виконати із використанням у корегуючому зворотному лінійного квадратичного регулятора, або лінійного квадратичного гауссовського регулятора (див. лекції 13, 14).