

## Лекція 11

### Синтез алгоритму цифрового автоматичного керування методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння

#### 11.1. Побудова МІМО ЛТІ математичної моделі ЦСАК у дискретному просторі станів за відомою неперервною нелінійною моделлю

Неперервним простором станів називається уявний простір, в якому відображається уявне положення (стан) об'єкту або процесу, математична модель якого записана у нормальній формі Коші.

Припустимо, що нам відома нелінійна математична модель неперервного процесу або об'єкту керування у неперервному просторі станів

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (11.1)$$

де  $x(t) \in E^m$ ,  $m$  — вимірний вектор, який носить назву вектор стану (вектор фазових координат);

$u(t) \in E^k$ ,  $k$  — вимірний вектор керування.

Необхідно побудувати математичну модель цього процесу або об'єкту в дискретному просторі станів.

Зазвичай до рівняння (11.1) додатково записується рівняння вимірів

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (11.2)$$

де  $y(t) \in E^l$ ,  $l$  — вимірний вектор, кожна координата якого вимірюється за допомогою датчиків первинної інформації.

Функції  $f(x(t), u(t), t)$  та  $g(x(t), u(t), t)$  є відповідно  $m$ - та  $l$ - вимірними векторними функціями.

Для побудови лінійної дискретної математичної моделі на базі рівнянь (11.1) та (11.2) необхідно виконати їх лінеаризацію і, в подальшому, перейти від неперервного до дискретного часу. Припустимо, що задано номінальне неперервне керування  $u_0(t)$ , завдяки якому можливо отримати номінальну траєкторію, якщо розв'язати рівняння  $\dot{x}_0(t) = f(x_0(t), u_0(t), t)$  при номінальних початкових умовах  $x_0(t_0)$ .

Вважаємо, що істинне початкове значення та істинне поточне керування достатньо мало відрізняються від номінальних розрахункових значень  $u(t) = u_0(t) + \tilde{u}(t)$  ;

$$x(t_0) = x_0(t_0) + \tilde{x}(t_0),$$

де  $\tilde{u}(t), \tilde{x}(t_0)$  — малі відхилення керування і початкових умов від розрахункових значень. Під дією  $\tilde{u}(t)$  та  $\tilde{x}(t_0)$  відбувається відхилення фазової траєкторії від номінальної  $x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t)$ , де  $\tilde{x}(t)$  — мале відхилення фазової траєкторії від номінальної.

Після підстановки  $u(t)$  та  $x(t)$  в рівняння (11.1), (11.2) та розкладу нелінійних функцій в ряд Тейлора поблизу номінальної точки  $(x_0(t), u_0(t))$ , маємо:

$$\dot{x}_0(t) + \dot{\tilde{x}}(t) = f(x_0(t), u_0(t), t) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \tilde{u}(t) + \text{доданки вищого порядку};$$

$$y_0(t) + \tilde{y}(t) = g(x_0(t), u_0(t), t) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_0 \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_0 \tilde{u}(t) + \text{доданки вищого порядку},$$

де  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0, \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_0, \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_0$  — якобіани відповідних функцій.

Нагадаємо, що якобіан функції є матрицею вигляду:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \quad \text{де} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x, u, t) \\ \dots \\ f_m(x, u, t) \end{bmatrix}.$$

Враховуючи, що  $\tilde{u}(t)$  та  $\tilde{x}(t)$  - малі відхилення, нехтуємо доданками вищого порядку у розкладах нелінійних функцій у ряд Тейлора. В результаті отримаємо лінійні диференціальні рівняння вектору стану і спостереження для відхилень від номінальних процесів:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_H \cdot \tilde{x}(t) + B_H \cdot \tilde{u}(t) \quad ; \quad (11.3)$$

$$\tilde{y}(t) = C_H \cdot \tilde{x}(t) + D_H \cdot \tilde{u}(t), \quad (11.4)$$

$$\text{де } A_H = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \quad B_H = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0, \quad C_H = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_0, \quad D_H = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_0.$$

В загальному випадку елементи матриць  $A_H, B_H, C_H, D_H$  залежать від  $x_0(t), u_0(t), t$ , тобто є нестационарними. Нехтуємо нестационарністю і вважаємо, що всі елементи матриць  $A_H, B_H, C_H, D_H$  є сталими. Тоді модель (11.3), (11.4) є неперервною МІМО ЛТІ моделлю, яку ще називають стаціонарною системою.

Для стаціонарних систем (11.3), (11.4) можливо виконати точний перехід до дискретної моделі, тобто до моделі у дискретному за часом просторі станів.

Для цього розв'яжемо систему рівнянь (11.3), (11.4):

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \cdot B_H \cdot \tilde{u}(\tau) d\tau$$

$$\tilde{y}(t) = C_H \cdot \tilde{x}(t) + D_H \cdot \tilde{u}(t)$$

де  $\Phi(t, t_0)$  — перехідна матриця, що є результатом розв'язання матричного диференціального рівняння

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A_H \cdot \Phi(t, t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad \Phi(t_0, t_0) = I;$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \text{одинична матриця};$$

$\Phi(t, t_0) = e^{A_H(t-t_0)}$  — експоненціал квадратної матриці (або матрична експонента).

Наприклад  $A_H = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Тоді

$$e^{A_H \cdot (t-t_0)} = I + A_H \cdot (t-t_0) + \frac{1}{2!} (A_H (t-t_0))^2 + \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\begin{bmatrix} t-t_0 & 2(t-t_0) \\ 3(t-t_0) & 4(t-t_0) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-t_0 & 2(t-t_0) \\ 3(t-t_0) & 4(t-t_0) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} t-t_0 & 2(t-t_0) \\ 3(t-t_0) & 4(t-t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t-t_0 & 2(t-t_0) \\ 3(t-t_0) & 4(t-t_0) \end{bmatrix} + \dots$$

Приклавши  $t_0 = n \cdot T_0$ ,  $t = (n+1) \cdot T_0$  отримаємо рекурентні співвідношення, які і описують дискретну лінійну стаціонарну модель (дискретну МІМО ЛТІ –

модель або математичну модель у дискретному просторі станів) у вигляді

$$\tilde{x}(n+1) = A \cdot \tilde{x}(n) + B \cdot \tilde{u}(n); \quad (11.5)$$

$$\tilde{y}(n) = C \cdot \tilde{x}(n) + D \cdot \tilde{u}(n), \quad (11.6)$$

де  $t=nT_0, n=0,1,2,\dots$ ;  $n$  - дискретний час,  $T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_B}$  ( $T_0$  обрано згідно із теоремою квантування);

$$A = e^{A_H \cdot T_0}, \quad B = \left( \int_0^{T_0} e^{A_H \tau} d\tau \right) \cdot B_H, \quad C = C_H \quad D = D_H.$$

Записана вище послідовність перетворень (методика перетворень) застосовуються для переходу від неперервної нелінійної нестационарної математичної моделі, яка представлена у неперервному просторі станів, до дискретної лінійної стаціонарної математичної моделі, яка представлена у дискретному просторі станів, в усіх випадках коли умови функціонування об'єкта керування практично не змінюється. Ця методика перетворень може бути застосована, як до математичної моделі об'єкта керування в цілому, так і до окремих елементів системи керування або до відомого нелінійного алгоритму керування, якщо він представлений за допомогою неперервної нелінійної нестационарної математичної моделі.

Часто вже існують дискретні математичні моделі об'єкту керування та (або) алгоритму керування, які представлені у вигляді скалярних дискретних передавальних функцій (SISO LTI – математичні моделі). В цьому випадку існують спеціальні прийоми побудови математичної моделі у дискретному просторі станів на основі відомої скалярної дискретної передавальної функції.

## **11.2. Приклад побудови MIMO LTI математичної моделі об'єкта керування у дискретному просторі станів**

Припустимо, що об'єктом керування (ОК) є двигун постійного струму (ДПС). Відома його лінійна стаціонарна математична модель у неперервному просторі станів. Розглянемо приклад побудови лінійної стаціонарної математичної моделі ДПС у дискретному просторі станів.

**Методика побудови МІМО ЛТІ математичної моделі у дискретному просторі станів за відомою МІМО ЛТІ математичною моделлю у неперервному просторі станів**

**Етапи методики**

- 1. Побудувати комп'ютерну МІМО ЛТІ математичною моделлю у неперервному просторі станів із використанням системи комп'ютерної математики (СКМ) MATLAB+Simulink.**
- 2. Обчислити період квантування за часом  $T_0$  .**
- 3. Побудувати комп'ютерну МІМО ЛТІ математичною моделлю у дискретному просторі станів із використанням функції c2d системи комп'ютерної математики MATLAB+Simulink.**
- 4. Виконати порівняльне імітаційне комп'ютерне моделювання.**

**Виконання етапів методики**

**Етап 1.**

Побудуємо лінійну стаціонарну математичну модель у неперервному просторі із використанням математичних моделей процесів, які відбуваються в електричній та механічній частинах ДПС:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = U; \quad e = C_e \omega; \quad I \frac{d\omega}{dt} = M - m; \quad M = C_m L; \quad M = B \omega,$$

де  $L$  - індуктивність якірного ланцюга;

$R$  - активний опір якірного ланцюга;

$e$  - електрорушійна сила самоіндукції (ЕДС);

$B, C_e, C_m$  - коефіцієнти, що залежать від конструктивних параметрів ДПС;

$\omega$  - швидкість обертання якоря;

$M$  - корисний момент на валу двигуна;

$m$  - момент навантаження;

$I$  - сумарний момент інерції всіх механічних частин, приведений до якоря ДПС.

Математична модель ДПС та рівняння виходу у неперервному просторі станів набувають вигляду

$$\begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{d\omega(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{C_e}{L} \\ \frac{C_m}{I} & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I} \end{bmatrix}}_B \cdot \begin{bmatrix} U(t) \\ m(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t),$$

де

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{C_e}{L} \\ \frac{C_m}{I} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{I} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що параметри А, В, С матимуть вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -25 & -7.5 \\ 7.5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

**Процедура застосування функції ss СКМ MATLAB+Simulink для побудови комп'ютерної MIMO LTI математичної моделі у неперервному просторі станів**

**1). Задаємо параметри математичної моделі ДПС у неперервному просторі станів у вигляді матриць:**

```
>> A=[-25 -7.5;7.5 0]
```

```
A =
```

```
-25.0000 -7.5000
```

```
7.5000 0
```

```
>> B=[5 0;0 -5]
```

```

B =
    5     0
    0    -5
>> C=[1 0;0 1]
C =
    1     0
    0     1
>> D=[0 0;0 0]
D =
    0     0
    0     0

```

2). За допомогою функції `ss` будемо неперервну математичну модель:

```
>> sysH=ss(A,B,C,D)
```

```

a =
      x1  x2
x1 -25 -7.5
x2  7.5   0

```

```

b =
      u1 u2
x1  5  0
x2  0 -5

```

```

c =
      x1 x2
y1  1  0
y2  0  1

```

```

d =
      u1 u2
y1  0  0
y2  0  0

```

**Continuous-time model.**

### Етап 2.

За теоремою квантування можливо оцінити чисельне значення періоду дискретизації за часом  $T_0 \leq \pi / \omega_B$ , де  $\omega_B$  - верхня гранична частота сигналу на вході АЦП. Припустимо, що  $\omega_B = 51.4 \text{ рад/с}$ . Тоді  $\pi/51.4=0.0611$ . Покладемо, що  $T_0 = 0.0600 \text{ с}$ .

### Етап 3.

**За допомогою функції `c2d` СКМ MATLAB+Simulink будемо комп'ютерну МІМО LTI математичну модель ДПС у дискретному просторі станів:**

```

>> sysD=c2d(sysH,T0)
a =      x1      x2

```

```
x1 0.1841 -0.2256
x2 0.2256 0.9359
```

```
b =      u1    u2
x1 0.1504 0.04274
x2 0.04274 -0.2928
```

```
c =      x1 x2
y1 1 0
y2 0 1
```

```
d =      u1 u2
y1 0 0
y2 0 0
```

Sampling time: 0.06  
Discrete-time model.

За допомогою функції `tf` СКМ MATLAB+Simulink знаходимо матричну передавальну функцію ДПС

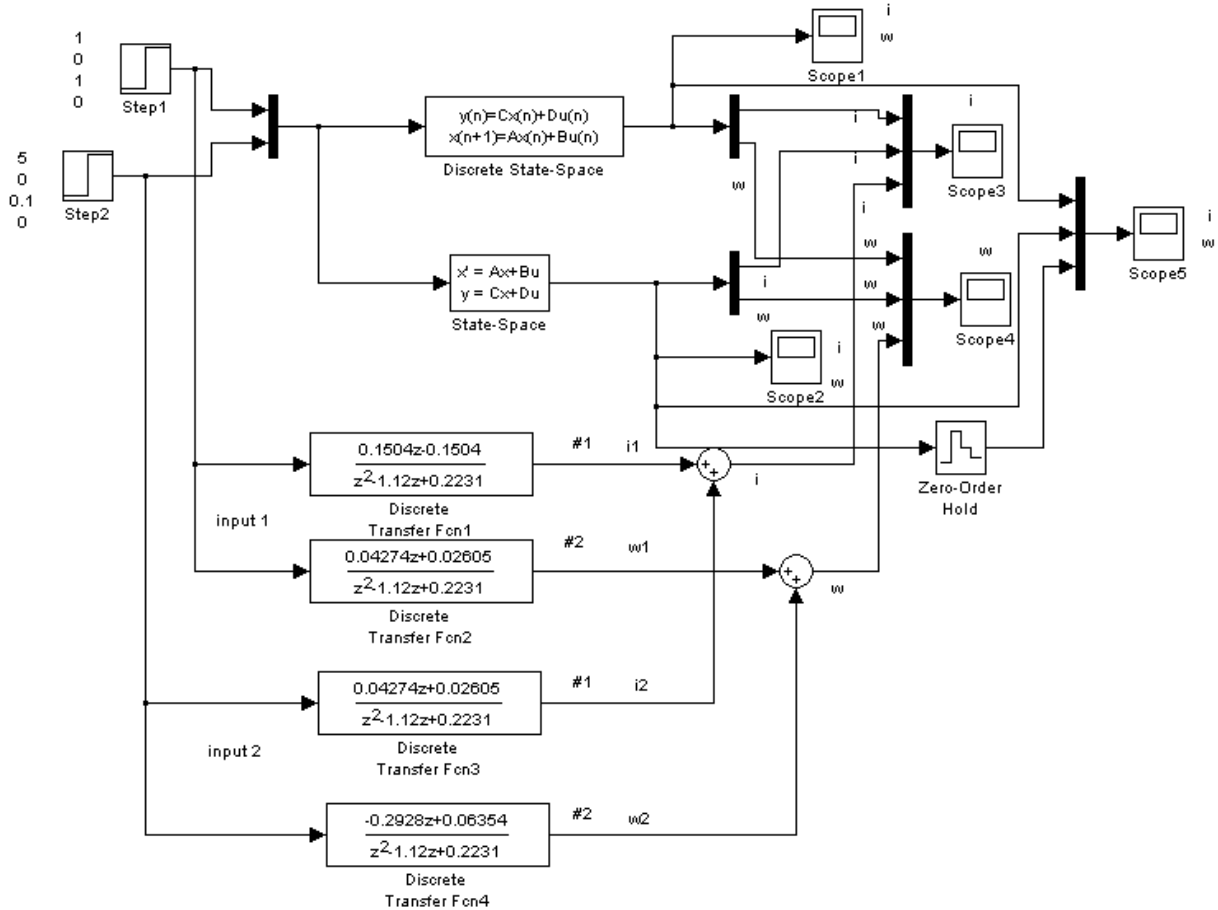
```
>> WD=tf(sysD)
Transfer function from input 1 to output...
      0.1504 z - 0.1504
#1: -----
      z^2 - 1.12 z + 0.2231

      0.04274 z + 0.02605
#2: -----
      z^2 - 1.12 z + 0.2231
Transfer function from input 2 to output...
      0.04274 z + 0.02605
#1: -----
      z^2 - 1.12 z + 0.2231

      -0.2928 z + 0.06354
#2: -----
      z^2 - 1.12 z + 0.2231
Sampling time: 0.06
```

### Етап 4.

Виконаємо порівняльне імітаційне комп'ютерне моделювання (див. рис. 11.1 та 11.2).



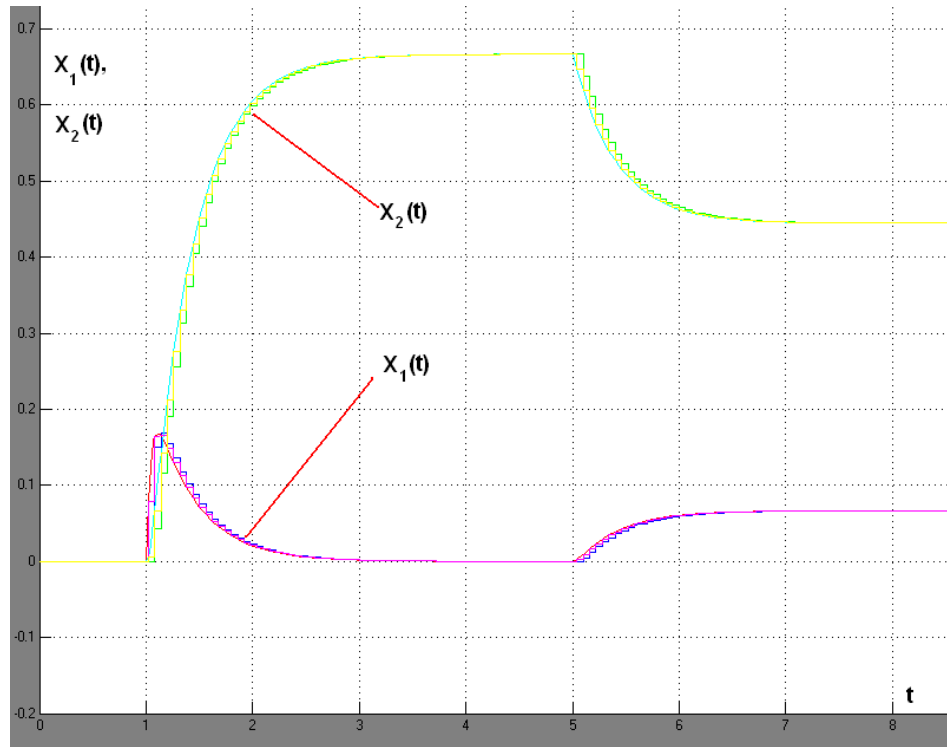
**Рис. 11. 1. Імітаційні комп'ютерні моделі ДПС у неперервному (State Space) та дискретному (Discrete State Space та Discrete Transfer Fcn 1; 2;3;4, та State Space Zero-Order Hold ) просторах станів**

В імітаційних комп'ютерних моделях управляючі сигнали подаються за допомогою блоків Step 1(напруга у ланцюзі якоря) та Step 2 (зовнішнє збурення). Матрична передавальна функція задається блоками Discrete Transfer Fcn 1, 2,3,4. Векторний сигнал  $x(n) = [x_1(n) \ x_2(n)]^T$  у дискретному просторі станів формується завдяки додаванню сигналів з виходу відповідних скалярних передавальних функцій  $x_1(n) = i_1(n) + i_2(n) = i(n)$ ,  $x_2(n) = \omega_1(n) + \omega_2(n) = \omega(n)$ .

Блок Zero-Order Hold на виході неперервної моделі State Space виконує функцію ідеального імпульсного елемента першого роду із періодом дискретизації  $T_0 = 0.06 \text{ c}$ . В результаті отримуємо модель, що складається із

блоків State Space та Zero-Order Hold, яка відповідає математичній моделі ДПС у дискретному просторі станів.

Зрозуміло, що усі три моделі: Discrete State Space; Discrete Transfer Fcn 1, 2,3,4; State Space Zero-Order Hold, є моделями ДПС у дискретному просторі станів. Це означає, що при однаковій вхідній дії, вихідні сигнали цих моделей повинні співпадати (див. рис. 11.2).



**Рис. 11.2. Вихідні сигнали моделей Discrete State Space, Discrete Transfer Fcn 1, 2,3,4, State Space Zero-Order Hold, які дозволяють моделювати ДПС у дискретному просторі станів:**  $x_1(t)$ - струм якоря,  $x_2(t)$  – швидкість обертання якоря,  $t=nT_0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ );  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  - вихідні координати вказаних моделей, чисельні значення яких у моменти часу  $t=nT_0$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) практично (майже абсолютно співпадають) співпадають; в момент часу  $t=1c$  подається східчаста управляюча дія у обмотку якоря ДПС за допомогою блоку Step 1 (бачимо наростання швидкості обертання якоря та «сплеск» струму якоря, який затухає до нуля тому, що не має тормозного механічного навантаження на якорь); в момент часу  $t=5c$  подається східчаста механічна тормозна дія на другий управляючий вхід за допомогою блоку Step 2, під впливом якої швидкість обертання якоря зменшується, а струм якоря збільшується для подолання тормозної дії

Практично точне співпадання вихідних координат моделей Discrete State Space, Discrete Transfer Fcn 1, 2,3,4, State Space Zero-Order Hold підтверджує теоретичний висновок про те, що всі вони дозволяють моделювати один і той самий ДПС у дискретному просторі станів, що і треба було отримати.

### 11.3. Спосіб побудови математичної моделі у дискретному просторі станів якщо відома скалярна дискретна передавальна функція

Розглянемо спосіб переходу до представлення математичної моделі у дискретному просторі станів при умові, що за результатами попередніх досліджень була отримана математична модель ЦСАК або її елементів у вигляді скалярної передавальної функції:

$$W(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{p_0 + p_1 z^{-1} + \dots + p_k z^{-k}}{1 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}} = \frac{p_0 z^m + p_1 z^{m-1} + \dots + p_m}{z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m},$$

де  $q_0 = 1$ , що підкреслює можливість фізичної реалізації (програмування у мікропроцесорі) записаної передавальної функції;  $m = k$  (якщо  $k > m$ , то усі коефіцієнти  $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_k$  дорівнюють нулю; якщо  $k < m$ , то усі коефіцієнти  $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_m$  дорівнюють нулю);  $X(z) = Z[x(n)]$ ,  $E(z) = Z[e(n)]$  -  $Z$ -перетворення вихідного  $x(n)$  та вхідного  $e(n)$  скалярних сигналів при нульових початкових умовах.

Завдання полягає в тому, щоб за рахунок визначення нових змінних перейти від скалярного різницевого рівняння

$$x(n) = Z^{-1}[W(z) \cdot E(z)], \text{ де } Z^{-1}[\cdot] \text{ – операція обчислення зворотного}$$

$Z$ -перетворення, до матрично-векторних рівнянь

$$\bar{x}(n+1) = A \cdot \bar{x}(n) + B \cdot e(n); \quad (11.7)$$

$$y(n) = C \cdot \bar{x}(n) + d \cdot e(n), \quad (11.8)$$

$$\text{де } \bar{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ \dots \\ x_m(n) \end{bmatrix}, \text{ } e(n) \text{ – скалярний вхідний сигнал;}$$

$$\dim A = m \times m, \dim B = m \times 1, \dim C = 1 \times m, \dim d = 1;$$

$A, B, C$  – сталі матриці,

$d$  – сталий скаляр.

Розглянемо один із варіантів розв'язання цієї задачі, яке полягає в наступному. Представимо вихідний сигнал системи у вигляді:

$$x(n) = Z^{-1} \left[ p_0 z^m \left( \frac{1}{z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m} \right) E(z) + \dots + p_m \left( \frac{1}{z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m} \right) E(z) \right].$$

Покладемо, що

$$X_1(z) = \frac{1}{z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m} E(z). \quad (11.9)$$

Тоді вираз для обчислення  $x(n)$  набуває вигляду:

$$x(n) = p_0 Z^{-1} [z^m x_1(z)] + \dots + p_m Z^{-1} [x_1(z)].$$

Враховуючи позначення зворотного Z- перетворення  $Z^{-1}[\cdot]$ , запишемо:

$$\begin{aligned} Z^{-1} [x_1(z)] &= x_1(n); \\ Z^{-1} [z \cdot x_1(z)] &= x_1(n+1) = x_2(n); \\ Z^{-1} [z^2 \cdot x_1(z)] &= x_1(n+2) = x_2(n+1) = x_3(n); \\ &\dots \\ Z^{-1} [z^{m-1} \cdot x_1(z)] &= x_1(n+m-1) = x_{m-1}(n+1) = x_m(n); \\ Z^{-1} [z^m \cdot x_1(z)] &= x_1(n+m) = x_m(n+1). \end{aligned}$$

Тоді:

$$x(n) = p_0 x_m(n+1) + p_1 x_m(n) + p_2 x_{m-1}(n) \dots + p_{m-1} x_2(n) + p_m x_1(n). \quad (11.10)$$

Із співвідношення (11.9), з урахуванням введених позначень, можливо отримати вираз

$$\begin{aligned} Z^{-1} [z^m \cdot x_1(z)] + q_1 Z^{-1} [z^{m-1} \cdot x_1(z)] + \dots + q_m Z^{-1} [x_1(z)] &= Z^{-1} [E(z)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_m(n+1) &= -q_1 x_m(n) - \dots - q_m x_1(n) + e(n). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Підставимо (11.11) в (11.10):

$$x(n) = y(n) = (p_m - p_0 q_m) x_1(n) + (p_{m-1} - p_0 q_{m-1}) x_2(n) + \dots + (p_1 - p_0 q_1) x_m(n) + p_0 e(n).$$

Таким чином, задача розв'язана і отримано вирази для матриць A, B, C та скаляра d:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ -q_m & -q_{m-1} & -q_{m-2} & \dots & -q_1 \end{bmatrix}; \quad B = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^T - \text{матриця розміру } m \times 1;$$

$$C = [p_m - p_0 q_m \quad p_{m-1} - p_0 q_{m-1} \quad \dots \quad p_1 - p_0 q_1] - \text{матриця розміру } 1 \times m;$$

$$d = p_0.$$

## Канонічні форми представлення дискретних математичних моделей у просторі станів

Застосовуючи лінійні перетворення

$$\bar{x}_T(n) = T \cdot \bar{x}(n),$$

де  $T$  – невироджена матриця розміру  $m \times m$  ( $\det T \neq 0$ ),

до системи

$$\begin{cases} \bar{x}(n+1) = A \cdot \bar{x}(n) + B \cdot e(n); \\ y(n) = C \cdot \bar{x}(n) + D \cdot e(n) \end{cases}$$

можливо отримати різні форми представлення лінійних дискретних математичних моделей у просторі станів:

$$\begin{cases} T \cdot \bar{x}(n+1) = (T \cdot A \cdot T^{-1})(T \cdot \bar{x}(n)) + (T \cdot B) \cdot e(n); \\ y(n) = (C \cdot T^{-1})(T \cdot \bar{x}(n)) + D \cdot e(n); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_T(n+1) = A_T \cdot \bar{x}_T(n) + B_T \cdot e(n); \\ y(n) = C_T \cdot \bar{x}_T(n) + D \cdot e(n), \end{cases}$$

де  $A_T = T \cdot A \cdot T^{-1}$ ;

$$B_T = T \cdot B;$$

$$C_T = C \cdot T^{-1}.$$

Деякі варіанти лінійних дискретних математичних моделей у просторі станів мають спеціальну структуру матриць  $A_T$ ,  $B_T$  та  $C_T$  і носять назву **канонічних форм**:

- діагональна канонічна форма;
- вертикальна супроводжуюча канонічна форма;
- супроводжуюча горизонтально канонічна форма;
- канонічна форма спостерігаємості;
- канонічна форма керованості (нормальна форма).

**Зауваження.**

Математична модель (11.7), (11.8) із обчисленими вище матрицями  $A$ ,  $B$ ,  $C$  відповідає канонічній формі керованості.

### 11.4. Приклад синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння

Припустимо, що необхідно побудувати астатичну ЦСАК швидкістю обертання ротора двигуна постійного струму (ДПС) із малим (бажано

мінімальним) часом тривалості перехідного процесу. Математична модель ДПС у вигляді Discrete State Space (рис. 11.1) побудована у розділі 11. 2.

## Методика синтезу

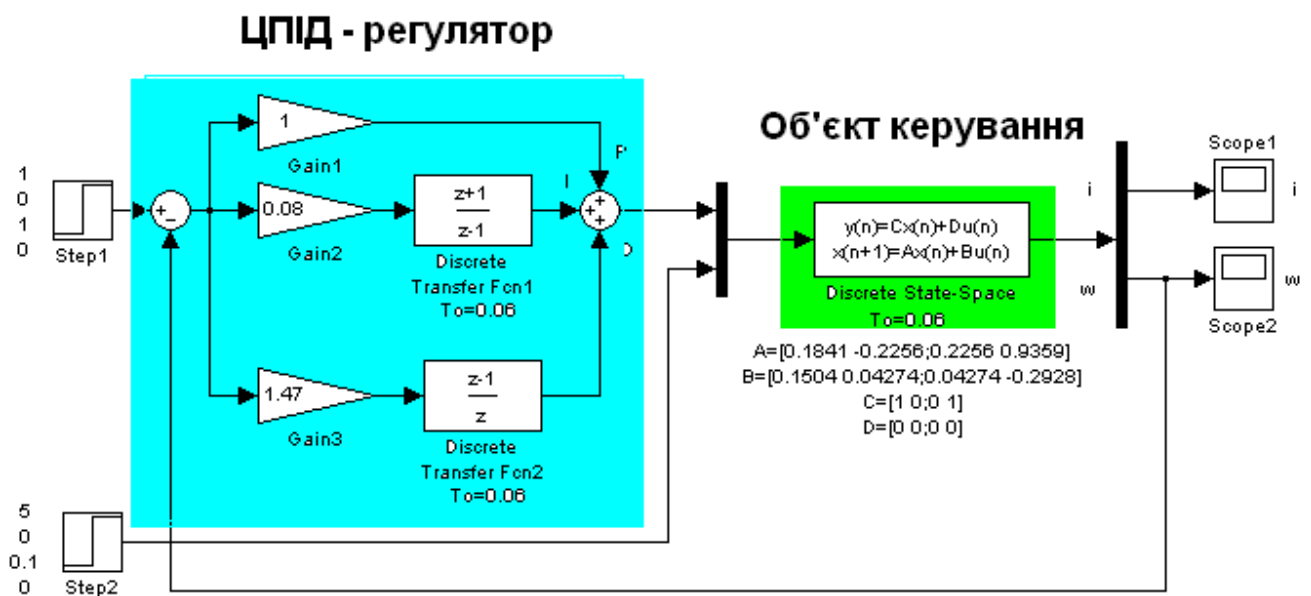
### Етапи методики

1. Вибір прототипу ЦСАК.
2. Параметрична оптимізація прототипу та порівняння якості процесів у ЦСАК- прототипу із вимогами.
3. Корекція динамічних властивостей об'єкту керування.
4. Параметрична оптимізація ЦСАК із скорегованим об'єктом керування та порівняння якості процесів у скорегованій ЦСАК із процесами у ЦСАК- прототипі.
5. Висновки.

### Виконання етапів методики

#### Етап 1.

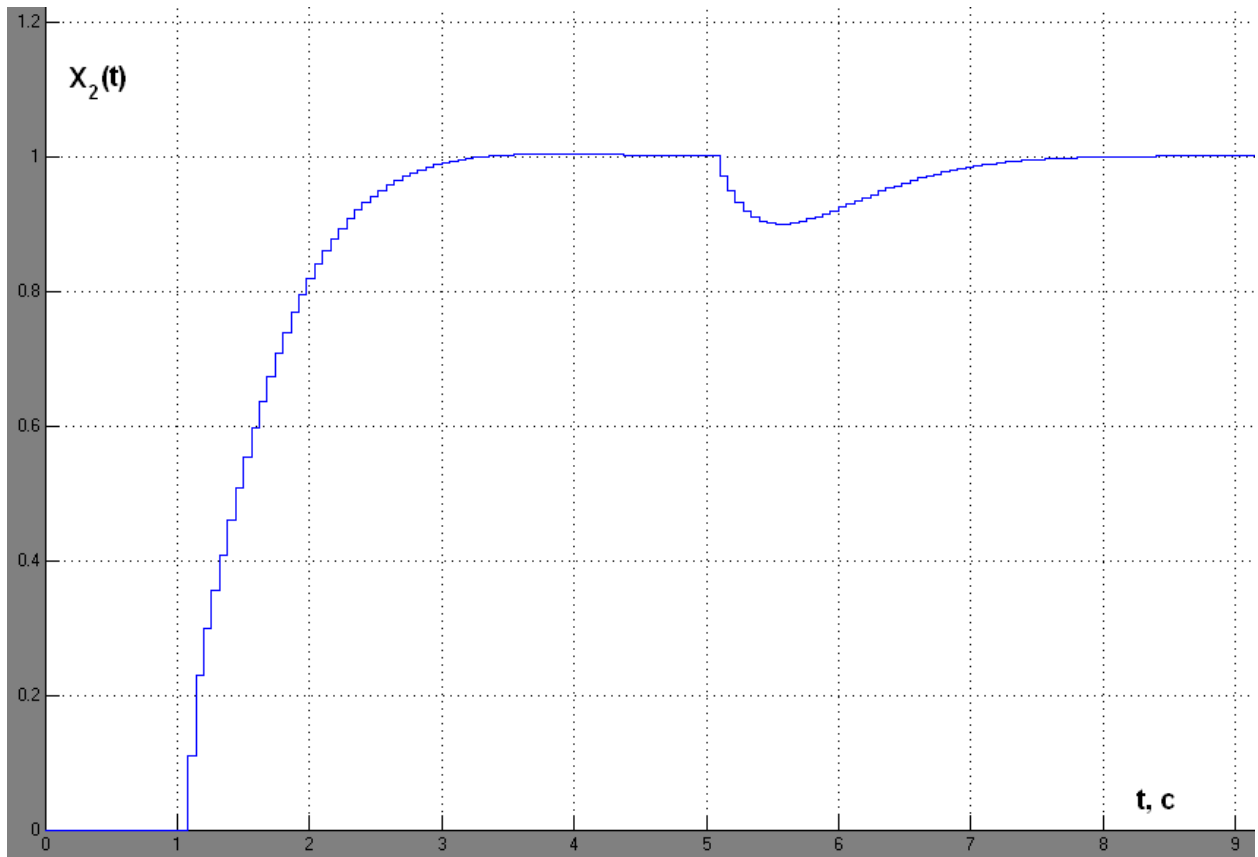
В якості ЦСАК – прототипу, яка має властивість астатизму першого порядку, оберемо ЦСАК із ЦПД- регулятором (див. рис. 11. 3 ).



*Рис. 11.3. Комп'ютерна математична модель ЦСАК – прототипу*

## Етап 2.

Налаштування ЦПД – регулятора виконано із використанням методу Зіглера-Ніколса. Аналіз перехідного процесу в каналі кутової швидкості обертання якоря (ротора) ДПС показує, що процес є аперіодичним та ЦСАК - прототип має астатизм першого порядку (див. рис. 11.4).



**Рис. 11.4.** Перехідний процес за кутовою швидкістю обертання якоря (ротора) ДПС:  $x_2(t)$  – швидкість обертання якоря,  $t=nT_0(n=0, 1, 2, \dots)$ ,  $T_0=0.06$  с

На рис. 11. 4 показано, що в момент часу  $t=1$ с подається східчаста управляюча дія за допомогою блоку Step1 (рис. 11.3), а в момент часу  $t=5$ с подається східчаста збурююча тормозна дія на другий управляючий вхід за допомогою блоку Step2 (рис. 11.3). Під впливом збурення швидкість обертання якоря спочатку зменшується, а потім повертається до величини, яку задає управляюча дія блоку Step1. Це означає, що ЦСАК – прототип має позитивну властивість, яку називають «квазиадаптивність». Але недоліком ЦСАК – прототипу є те, що перехідний процес має значну тривалість, яка дорівнює

приблизно 2.5 с ( $t_{\text{ПП}}=2.5$  с). Поставимо за мету зменшити час тривалості перехідного процесу алгоритмічним шляхом.

### Етап 3.

Виконаємо корекцію динамічних властивостей об'єкта керування.

У відповідності із викладеним у розділі 11.2, рівняння дискретної математичної моделі ДПС має вигляд:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} U(n) + \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} m(n);$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(n) \\ m(n) \end{bmatrix},$$

де  $U(n) = U_R(n) + U_G(n)$  - керуючий сигнал, який складається із сигналу регулювання  $U_R(n)$  та корегуючого сигналу  $U_G(n)$ . Покладемо, що

$$U_G(n) = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix};$$

$$U_R(n) = 1(n).$$

Тоді, за допомогою корегуючого сигналу (корегуючого зворотного зв'язку)  $U_G(n)$  можна досягти зменшення часу тривалості перехідного процесу до деякої бажаної величини. Цього можливо досягти завдяки спеціальному розрахунку коефіцієнтів корегуючого зворотного зв'язку  $K_1$  та  $K_2$ .

Покажемо як ці розрахунки можливо виконати. Обчислимо характеристичне рівняння математичної моделі ДПС із скорегованими динамічними характеристиками за виразом:

$$\det \left( \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} z - a_{11} - b_{11}K_1 & -a_{12} - b_{11}K_2 \\ -a_{21} - b_{21}K_1 & z - a_{22} - b_{21}K_2 \end{pmatrix} = z^2 + p_B z + q_B,$$

де  $p_B = z_{B1} + z_{B2}$ ,  $q_B = z_{B1} \cdot z_{B2}$ ;  $z_{B1}, z_{B2}$  - бажані значення коренів характеристичного рівняння, які задає дослідник. Коефіцієнти корегуючого зворотного зв'язку  $K_1$  та  $K_2$  необхідно обрати таким чином, щоб корені полінома другого степеня, що стоїть зліва у записаному вище рівнянні дорівнювали бажаним значенням коренів.

В системі комп'ютерної математики MATLAB+Simulink існує спеціальна функція `acker`, яка дозволяє знайти значення коефіцієнтів корегуючого зворотного зв'язку  $K_1$  та  $K_2$  за відомими бажаними значеннями коренів характеристичного рівняння  $z_{B1}$ ,  $z_{B2}$  та параметрами математичної моделі об'єкта

$$\text{керування } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = [B_1 \quad B_2], \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}.$$

Враховуючи той факт, що МІМО ЛТІ -математична модель ДПС у дискретному просторі станів задається матрицями

```
>> A=[0.1841 -0.2256;0.2256 0.9359];
```

```
>> B=[0.1504 0.04274;0.04274 -0.2928];
```

```
>>C=[1 0;0 1];
```

```
>>D=[0 0;0 0];
```

можемо записати, що

```
>> B1=[0.1504;0.04274]
```

```
B1 = 0.1504
```

```
0.0427.
```

Покладемо, що обидва бажані кореня дорівнюють 0.5.

Тоді матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку, який корегує динамічні властивості ДПС ( корегуючого зворотного зв'язку), обчислюється наступним чином

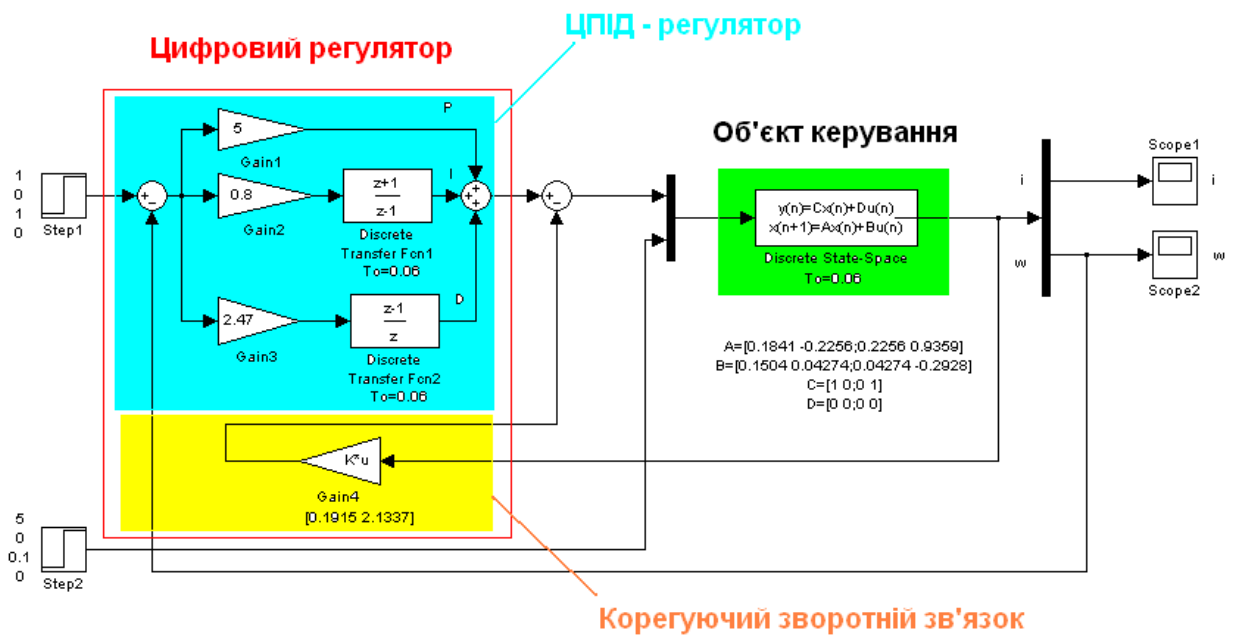
```
>>K05b= acker(A,B1,[0.5 0.5])
```

```
K05b = 0.1915 2.1337.
```

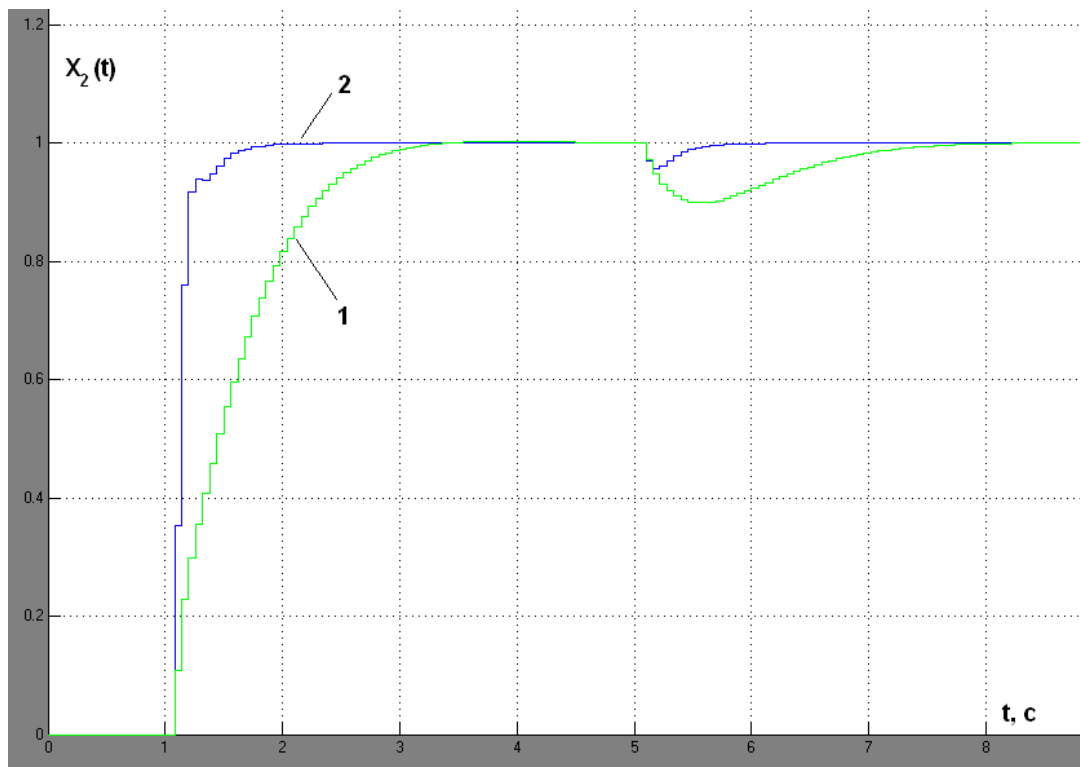
#### Етап 4.

Використовуючи метод Зіглера-Ніколса, виконаємо налаштування ЦПД-регулятора в ЦСАК із ДПС (див. рис. 11.5), динамічні властивості якого були зкореговані за допомогою корегуючого зворотного зв'язку. Результати

порівняльного імітаційного комп'ютерного експерименту представлені на рис. 11.5.



**Рис. 11.5.** Комп'ютерна математична модель модернізованої ЦСАК, цифровий регулятор якої складається із регулятора, що корегує динамічні властивості об'єкта керування (корегуючий зворотній зв'язок) та ЦПІД-регулятора



**Рис. 11.6.** Перехідні процеси за швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС в ЦСАК-прототипі (1) та в ЦСАК із алгоритмом цифрового автоматичного керування, який синтезовано методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння (2)

#### **Етап 4.**

За результатами порівняльного аналізу перехідних процесів у каналі керування швидкістю обертання ротора (якоря) ДПС, що відбуваються у ЦСАК-прототипі (рис. 11.6, 1) та в модернізованій ЦСАК (рис. 11. 6, 2), тобто ЦСАК із алгоритмом цифрового автоматичного керування, який синтезовано методом забезпечення бажаного характеристичного рівняння, можливо зробити наступні висновки.

1. Результати порівняльного комп'ютерного моделювання повністю підтвердили викладені у розділах 11.1-11-11.3 положення.
2. Корекція динамічних властивостей об'єкта керування дозволила зменшити час тривалості перехідного процесу з 2.5 с до 1 с, тобто майже у два з половиною рази.
3. Корекція динамічних властивостей об'єкта керування дозволила зменшити амплітуду негативного «сплеску» швидкості в момент часу дії збурення приблизно у два рази.
4. Подальше вдосконалення ЦСАК можливо виконати із використанням у корегуючому зворотному зв'язку модального регулятора або лінійного квадратичного регулятора, або лінійного квадратичного гауссовського регулятора (див. лекції 12, 13, 14).