

Лекція 10

Синтез алгоритму цифрового автоматичного керування методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію

Розділ 10.1. Цифровий пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор (ЦПІД-регулятор)

Ідеалізоване рівняння неперервного керуючого сигналу неперервного ПІД-регулятора, має вигляд:

$$e(t) = \underbrace{K_p \cdot y(t) + K_i \int_0^t y(\tau) d\tau + K_d \cdot \frac{dy(t)}{dt}}_{\text{структура закону управління}};$$

K_p - коефіцієнт передачі пропорційного сигналу;

K_i - коефіцієнт передачі інтегрального сигналу;

$K_i = \frac{1}{T_i}$; T_i - стала інтегрування;

K_d - коефіцієнт передачі диференціального сигналу;

$K_d = T_d$; T_d - стала диференціювання.

Використаємо неперервний ПІД-регулятор як прототип для побудови дискретного ПІД-регулятора, припускаючи, що T_0 або задано, або обчислено із використанням теореми квантування ($T_0 \leq \frac{\pi}{\omega_B}$).

Для цього побудуємо градчату функцію сигналу керування:

$$e(n) = K_p \cdot y(n) + K_i \int_0^{nT_0} y(\tau) d\tau + K_d \cdot \frac{y(n) - y(n-1)}{T_0},$$

$$\text{де } \frac{dy(t)}{dt} \cong \frac{y(n) - y(n-1)}{T_0}, \quad t = nT_0.$$

Знайдемо Z – перетворення від обох частин записаного рівняння:

$$Z[e(n)] = K_p Z[y(n)] + K_i Z\left[\int_0^{nT_0} y(\tau) d\tau\right] + \frac{K_d}{T_0} Z[y(n) - y(n-1)] \Leftrightarrow$$

$$E(z) = E_p(z) + E_i(z) + E_d(z) = D_{II}(z) \cdot Y(z) + D_I(z) \cdot Y(z) + D_D(z) \cdot Y(z);$$

$$\text{де } E(z) = Z[e(n)]; \quad Y(z) = Z[y(n)];$$

$D_p(z) = \frac{E_p(z)}{Y(z)} = K_p$ - передавальна функція за позиційним (пропорційним)

сигналом;

$D_i(z) = \frac{E_i(z)}{Y(z)}$ - передавальна функція за інтегральним сигналом;

$D_d(z) = \frac{E_d(z)}{Y(z)}$ - передавальна функція за диференціальним сигналом.

Розглянемо більш детально передавальні функції $D_d(z)$ та $D_i(z)$.

Припустимо, що диференціювання відбувається при нульових початкових умовах. Тоді:

$$D_d(z) = \frac{E_d(z)}{Y(z)} \Rightarrow E_d(z) = \frac{K_d}{T_0} (Y(z) - z^{-1}Y(z)) = \frac{K_d}{T_0} (1 - z^{-1})Y(z).$$

$$\text{Тоді } D_d(z) = \frac{K_d}{T_0} (1 - z^{-1}) = \frac{K_d}{T_0} \cdot \frac{z-1}{z}.$$

Припустимо, що інтегрування відбувається із використанням методу прямокутників (інтегрування методом прямокутників - ІМП) так, як це зображено на рис.10.1:

$e_{IMP}(n) = K_i \sum_{l=1}^n T_0 y(l-1)$ - алгоритм обчислення площі методом прямокутників.

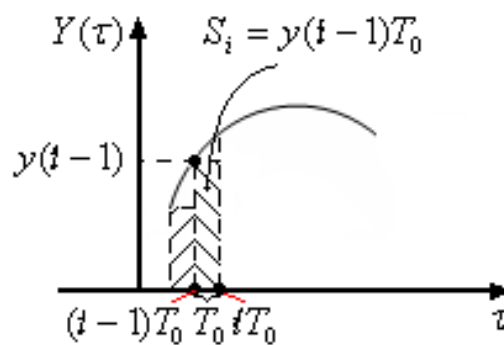


Рис.10.1. Графічна ілюстрація

стосовно інтегрування методом прямокутників

Цей алгоритм носить назву **позиційного** тому, що при надходженні кожного нового відліку $y(i)$ використовують всі попередні значення y .

Більш зручним є рекурентний алгоритм, коли для обчислення наступного значення інтегралу використовують його попереднє значення плюс поправки.

Рекурентна форма запису алгоритму обчислення площі являє собою різницеве рівняння наступного вигляду:

$$e_{IMT}(n) - e_{IMT}(n-i) = K_i \sum_{i=1}^n T_0 y(i-1) - K_i \sum_{i=1}^{n-1} T_0 y(i-1) = K_i T_0 y(n-1).$$

Знаходимо Z – перетворення від обох частин при нульових початкових умовах:

$$Z[e_{IMT}(n)] - Z[e_{IMT}(n-i)] = K_i T_0 Z[y(n-1)] \Leftrightarrow E_{IMT}(z) - z^{-1} E_{IMT}(z) = K_i T_0 z^{-1} Y(z).$$

Остаточно отримати передавальну функцію для інтегрування методом прямокутників:

$$D_{IMT}(z) = \frac{K_i \cdot T_0 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{K_i \cdot T_0}{z - 1}.$$

Якщо в знаменнику дискретної передавальної функції присутній біном $z-1$, то це означає, що в дискретному вигляді реалізується операція інтегрування.

Якщо інтегрування відбувається методом трапецій (інтегрування методом трапецій – ІМТ; див. рис.10.2), то позиційний алгоритм обчислення інтегралу набуває вигляду:

$$e_{IMT}(n) = K_i \sum_{l=1}^n \frac{y(l) + y(l-1)}{2} \cdot T_0$$

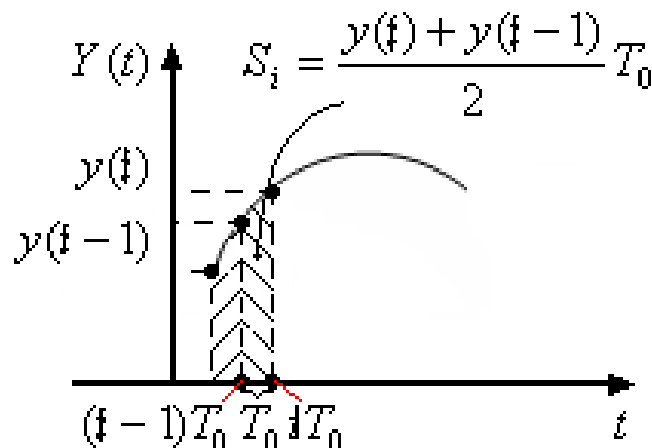


Рис.10.2. Графічна ілюстрація стосовно інтегрування методом трапецій

Використовуючи позиційний алгоритм, отримаємо рекурентне співвідношення для обчислення площі:

$$e_{IMT}(n) - e_{IMT}(n-1) = K_i \sum_{l=1}^n \frac{y(l) + y(l-1)}{2} \cdot T_0 - K_i \sum_{l=1}^{n-1} \frac{y(l) + y(l-1)}{2} \cdot T_0 = K_i \cdot T_0 \cdot \frac{y(n) + y(n-1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$Z[e_{IMT}(n)] - Z[e_{IMT}(n-1)] = \frac{K_i \cdot T_0}{2} \cdot (Z[y(n)] + Z[y(n-1)]) \Leftrightarrow$$

$$(1 - z^{-1}) \cdot E_{IMT}(z) = \frac{K_i \cdot T_0}{2} \cdot (1 + z^{-1}) \cdot Y(z).$$

$$\text{Тоді } D_{IMT}(z) = \frac{K_i \cdot T_0}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{K_i \cdot T_0}{2} \cdot \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Остаточно схема алгоритму функціонування цифрового ПІД-регулятора представлена на рис. 10.3, де в якості передавальної функції за інтегральним сигналом можливо обрати або $D_{IMT}(z)$, або $D_{IMT}(z)$:

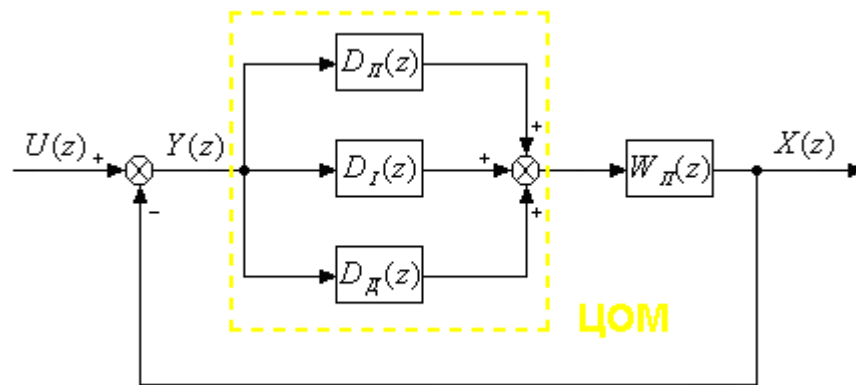


Рис.10.3 Структура ЦСАК із цифровим ПІД-регулятором із передавальною функцією: $D_{PID}(z) = D_P(z) + D_I(z) + D_D(z)$; $W_P(z)$ - передавальна функція приведенного дискретного об'єкта керування

Висновок:

- Отримано загальний вигляд передавальної функції класичного цифрового ПІД-регулятора, параметри якої можна обчислити за відомими параметрами неперервного ПІД-регулятора та періодом дискретизації: $K_{pc} = K_p$; $K_{ic} = K_i \cdot T_0$ (якщо інтегрування відбувається методом прямокутників) або $K_{ic} = K_i \cdot T_0 / 2$ (якщо інтегрування відбувається методом трапецій); $K_{dc} = K_d / T_0$.

2. Якщо відомі параметри $K_{pc1}, K_{ic1}, K_{dc1}$ одного ЦПД-регулятора із періодом дискретизації за часом T_{01} і виникає необхідність перейти до періоду дискретизації за часом T_{02} , то параметри другого ЦПД-регулятора можна обчислити за виразами:

$$K_{pc2} = K_{pc1}, K_{ic2} = K_{ic1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{T_{01}}{T_{02}}\right)}, K_{dc2} = K_{dc1} \cdot \left(\frac{T_{01}}{T_{02}}\right).$$

10.2. Узагальнений та модифікований ЦПД-регулятори

Узагальненим цифровим ПД-регулятором ν -ого порядку називають ЦПД-регулятор із передавальною функцією вигляду:

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_\nu z^{-\nu}}{1 - z^{-1}}; \nu = 1, 2, \dots$$

Модифікованим цифровим ПД-регулятором називають ЦПД-регулятор, вихідний сигнал якого має вигляд:

$$E(z) = E_1(z) + E_2(z) = D_1(z) \cdot Y(z) + D_2(z) \cdot X(z),$$

де

$$D_i(z) = \frac{b_{0i} + b_{1i} z^{-1} + \dots + b_{\nu i} z^{-\nu}}{1 - z^{-1}}, i = 1, 2; \nu = 1, 2, \dots$$

Розглянемо структуру ЦСАК із модифікованим ЦПД-регулятором (див. рис. 10.4). Як бачимо, порівняно із ЦСАК, в якій використовується класичний ЦПД-регулятор, в структурі ЦСАК із модифікованим ЦПД-регулятором використовується внутрішній контур корекції.

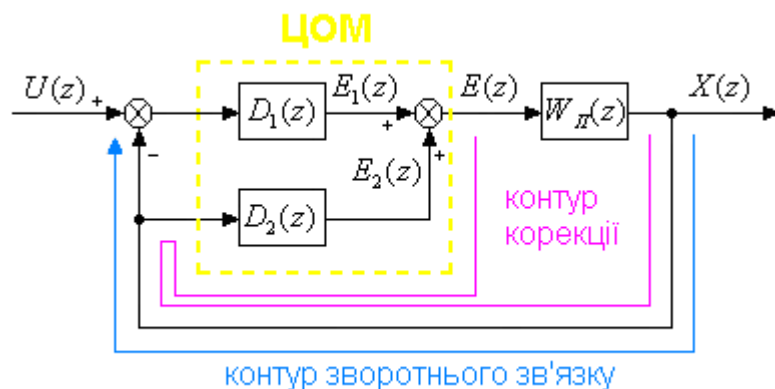


Рис.10.4. Структурна схема математичної моделі ЦСАК із використанням модифікованого ЦПД-регулятора: $W_{II}(z)$ - передавальна функція приведенного дискретного об'єкта керування

Подальша модернізація цифрового ПД-регулятора пов'язана із реалізацією різних алгоритмів числового інтегрування та диференціювання, що призводить у загальному випадку до передавальної функції вигляду:

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_L z^{-L}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_K z^{-K}} \cdot z^{-S}, \text{ де } L, K, S - \text{ цілі додатні числа, які задають}$$

структуру регулятора, тобто є структурними параметрами; $b_i (i = \overline{0, L}), a_j (j = \overline{1, K})$ - параметри регулятора. Нагадаємо ще раз: якщо регулятор виконує операцію інтегрування, то серед коренів знаменника є хоча б один корінь, що дорівнює 1.

Додаткові можливості покращення алгоритму керування пов'язані із цифровою фільтрацією сигналу, який подається на вхід ЦПД-регулятора. Цифрові фільтри включають в ЦСАК перед алгоритмом керування (див. рис. 10.5).

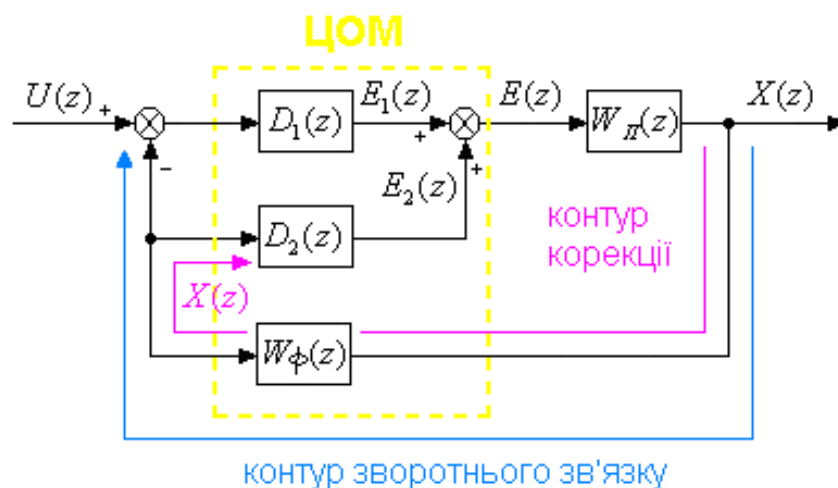


Рис.10.5. Структурна схема математичної моделі ЦСАК із модифікованим ЦПД-регулятором та цифровим фільтром:

$W_{\phi}(z)$ - передавальна функція цифрового фільтру;

$W_{II}(z)$ - передавальна функція приведенного дискретного об'єкта керування

Для отримання високої якості процесу керування структуру (структурні параметри L, K, S) та параметри $b_0, b_1, \dots, b_L, a_1, a_2, \dots, a_K$, передавальної функції $D(z)$ цифрового регулятора потрібно обирати враховуючи властивість об'єкта керування, характеристики зовнішніх та внутрішніх впливів, які збурюють процес керування.

Припустимо, що відомі бажані значення сигналів на виході ЦОМ $e_B(n)$ та на виході ЦСАК $x_B(n)$. Тоді, наприклад за середньоквадратичним критерієм, можливо оцінити відхилення реальних процесів у ЦСАК із обраними параметрами закону керування від бажаних процесів:

$$W(K, L, S; a_1, \dots, a_K; b_0, \dots, b_L) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\alpha_x \cdot ((x_B(n) - x(n))^2 + \alpha_e \cdot ((e_B(n) - e(n))^2)),$$

де $\alpha_x + \alpha_e = 1, \alpha_x, \alpha_e > 0$.

Задамо декілька наборів структурних параметрів L, K, S і виконаємо для цих наборів мінімізацію обраного критерію за параметрами a_1, a_2, \dots, a_K та b_0, b_1, \dots, b_L , наприклад, чисельними методами, які було викладено у попередній лекції. Порівняємо результати оптимізації і оберемо ті параметри для реалізації на реальному об'єкті керування, при яких значенні критерію було найкращім.

Підкреслимо, що значення $x_B(n), x(n), e_B(n), e(n)$ для всіх $n = 1, 2, \dots, N$ можливо знайти шляхом імітаційного комп'ютерного експерименту.

Розділ 10.3. Приклад синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію

У цьому розділі викладено методика, яка полягає у комплексному застосуванні методу Зіглера – Ніколса та чисельних методів нульового порядку для синтезу алгоритму цифрового автоматичного керування методом чисельної оптимізації алгоритмічно заданого критерію. Метод Зіглера – Ніколса дозволяє отримати початкові умови, які забезпечують швидке наближення до точки оптимуму при подальшому застосуванні чисельних методів нульового порядку.

Методика застосування чисельних методів нульового порядку в задачах параметричної оптимізації цифрових ПД-регуляторів дронів

В задачах параметричної оптимізації цифрових пропорційно-інтегрально-диференціальних регуляторів (ЦПД - регуляторів) дронів критерій оптимальності, зазвичай, задається алгоритмічно, тому що встановити явну, записану у вигляді формули аналітичну залежність критерію від $3N$ параметрів практично не можливо. При налаштуванні одного ЦПД-регулятора вектор параметрів, що налаштовується (оптимізується) дорівнює 3, а при налаштуванні N ЦПД-регуляторів, що входять до складу багатоконтурної системи управління приводом гвинта, зрозуміло, що ця кількість збільшується в N разів. Тому використання методів нульового порядку для розв'язання оптимізаційних задач у цьому випадку більш доцільне ніж використання чисельних методів першого та другого порядків. Крім того, слід підкреслити, що дрон може мати від одного до 24 приводів гвинтів. Тобто, з математичної точки зору, задачу оптимізації із $3N$ управляючими змінним потрібно буде розв'язувати до 24 разів.

Згідно із класичною теорією автоматичного керування параметричну оптимізацію (налаштування) для стаціонарних лінійних систем керування можливо виконувати із використанням частотних, часових та інтегральних критеріїв. Враховуючи значну кількість приводів бажано мати можливість швидко і майже оптимально налаштовувати і переналаштовувати регулятори. На сьогодні для налаштування ЦПД-регуляторів найширше застосовується метод Зіглера-Ніколса, що базується на часових критеріях якості функціонування цифрових систем автоматичного керування (ЦСАК). Але при налаштуванні параметрів ЦПД-регуляторів багатоконтурних систем якість налаштування із використанням лише цього методу значно погіршується. Наявність ЦПД-регулятора у кожному із контурів дозволяє надати цьому контуру властивості квазіінваріантності та квазіадаптивності, що є принципово важливим для дронів, які за звичай працюють в умовах суттєвих параметричних і не параметричних збурень. Формальне застосування лише чисельних методів багатовимірної оптимізації за звичай потребує значного часу і суттєво залежить від вдалого першого наближення. Так, наприклад, застосування NCD-технології системи комп'ютерної математики MATLAB+Simulink при багато параметричній оптимізації перетворюється майже на мистецтво.

Тому актуальною є прикладна математична задача, що стосується розробки ефективної методики попереднього (під час підготовки до польоту) налаштування та оперативного (в реальному часі) переналаштування багатоконтурних систем управління із цифровими ПД-регуляторами.

Таким чином, завдання полягає в розробці методики зручної для практичного використання при параметричній оптимізації за скалярним інтегральним критерієм багатоконтурних систем управління із цифровими ПД-регуляторами.

В якості вихідних даних розглянемо лінеаризовану математичну модель, що описує динаміку руху дрону у каналі висоти (див. рис.10.6). Керуючими змінними, тобто параметрами, які необхідно налаштувати, є коефіцієнти передачі ЦПД-регуляторів k_{pi}, k_{ij}, k_{dj} відповідно за пропорційним, інтегральним

та диференціальним сигналами для першого ($j=1$) та другого ($j=2$) регуляторів. В якості критерію оптимальності обираємо усереднений на інтервалі спостереження T інтеграл від квадрату відхилення $\Delta_x(t)$ вихідного сигналу математичної моделі руху дрону $x(t)$ від еталонної (бажаної) зміни в часі цього сигналу $x_b(t)$:

$$W(k_{p1}, k_{i1}, k_{d1}; k_{p2}, k_{i2}, k_{d2}) = \frac{1}{T} \int_0^T (\Delta_x(t))^2 dt, \quad (10.1)$$

де $\Delta_x(t) = x_b(t) - x(t)$.

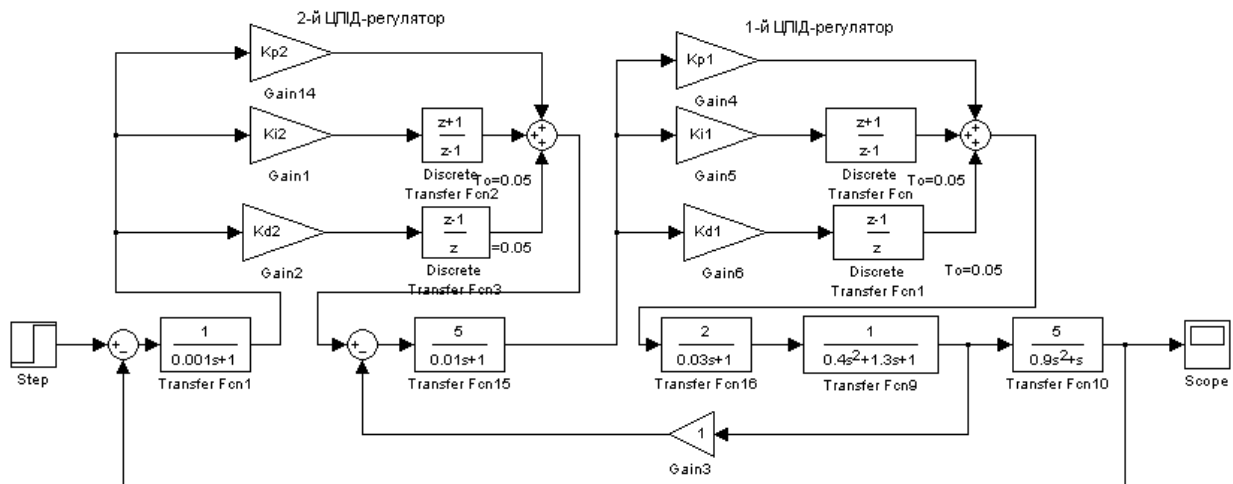


Рис.10.6. Комп'ютерна математична модель двоконтурної ($N=2$) цифрової системі керування рухом дрону у каналі висоти

Методика складається із наступних етапів:

1-й етап – обираємо еталонну (бажану) модель зміни в часі перехідного процесу на виході системи управління;

2-й етап – застосовуємо метод Зіглера-Ніколса для пошуку значення управляючих параметрів $k_{p10}, k_{i10}, k_{d10}, k_{p20}, k_{i20}, k_{d20}$, які використовуємо на наступному етапі як початкові значення в чисельних методах нульового порядку. Другий етап складається з двох під етапів:

2.1. Налаштування першого ЦПД-регулятора лише для внутрішнього контуру і запам'ятовуванні знайдених значень $k_{p10}, k_{i10}, k_{d10}$;

2.2. Налаштування другого ЦПД-регулятора при умові, що у першому ЦПД-регуляторі використані раніше знайдені і запам'ятовані значення параметрів $k_{p10}, k_{i10}, k_{d10}$.

3-й етап – застосовуємо будь-який чисельний метод нульового порядку для пошуку мінімуму критерію (10.1) :

$$W \rightarrow \min_{k_{p1}, k_{i1}, k_{d1}; k_{p2}, k_{i2}, k_{d2}}. \quad (10.2)$$

Підкреслимо, що при виконанні 3-тього етапу виконується перевірка знайденого оптимального розв'язку на чуттєвість до зміни параметрів об'єкту управління. Ці зміни можуть бути, як детермінованими (відбуватися у відомі моменти часу і на відомі величини), так випадковими.

Наведена вище методика повинна входити до складу загальної методики, яка стосується синтезу цифрової системи автоматичного керування в загалі.

Розглянемо результат застосування методики на прикладі моделі (див. рис.10.6).

Перший етап. В якості моделі еталонної (бажаної) зміни в часі сигналу на виході ЦСАК обираємо сигнал, що діє на виході моделі стандартної форми Баттерворта 3-тього порядку зменшивши при цьому час тривалості перехідного процесу в тричі.

Другий етап.

Перший під етап. Отримано наступні значення параметрів першого ЦПІД-регулятора $k_{p10} = 1.8, k_{i10} = 0.1125, k_{d10} = 3.6$.

Другий під етап. Отримано наступні значення параметрів другого ЦПІД-регулятора $k_{p20} = 0.6, k_{i20} = 0.0125, k_{d20} = 3.6$.

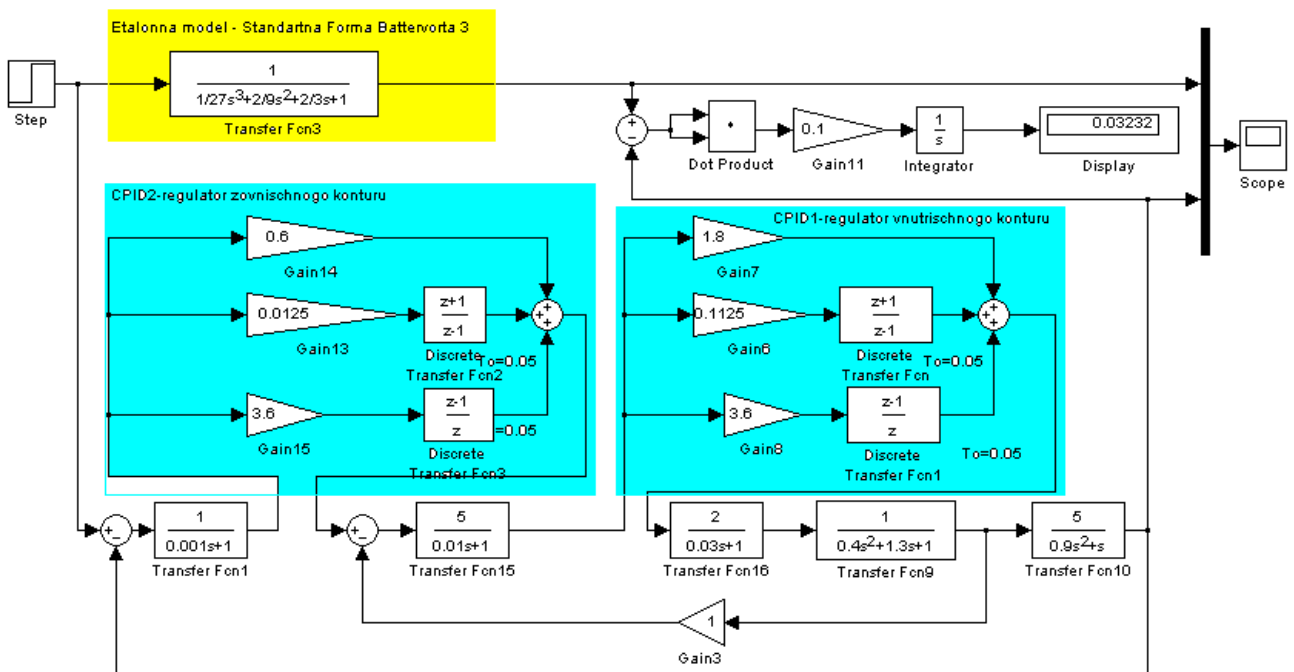


Рис. 10.7. Комп'ютерна математична модель, яка дозволяє порівняти перехідні процеси на виході математичної моделі ЦСАК і еталонної моделі, а також обчислити значення критерію (10.1) в залежності від значень параметрів ЦПІД-регуляторів (алгоритмічний спосіб завдання критерію):

$$W(k_{p10} = 1.8, k_{i10} = 0.1125, k_{d10} = 3.6; k_{p20} = 0.6, k_{i20} = 0.0125, k_{d20} = 3.6) = 0.03232$$

Результат комп'ютерного моделювання, отриманий із використанням моделі (див. рис.10.7), показує, що вихідний сигнал ЦСАК суттєво відрізняється від сигналу на виході еталонної (бажаної) моделі (див. рис.10.8).

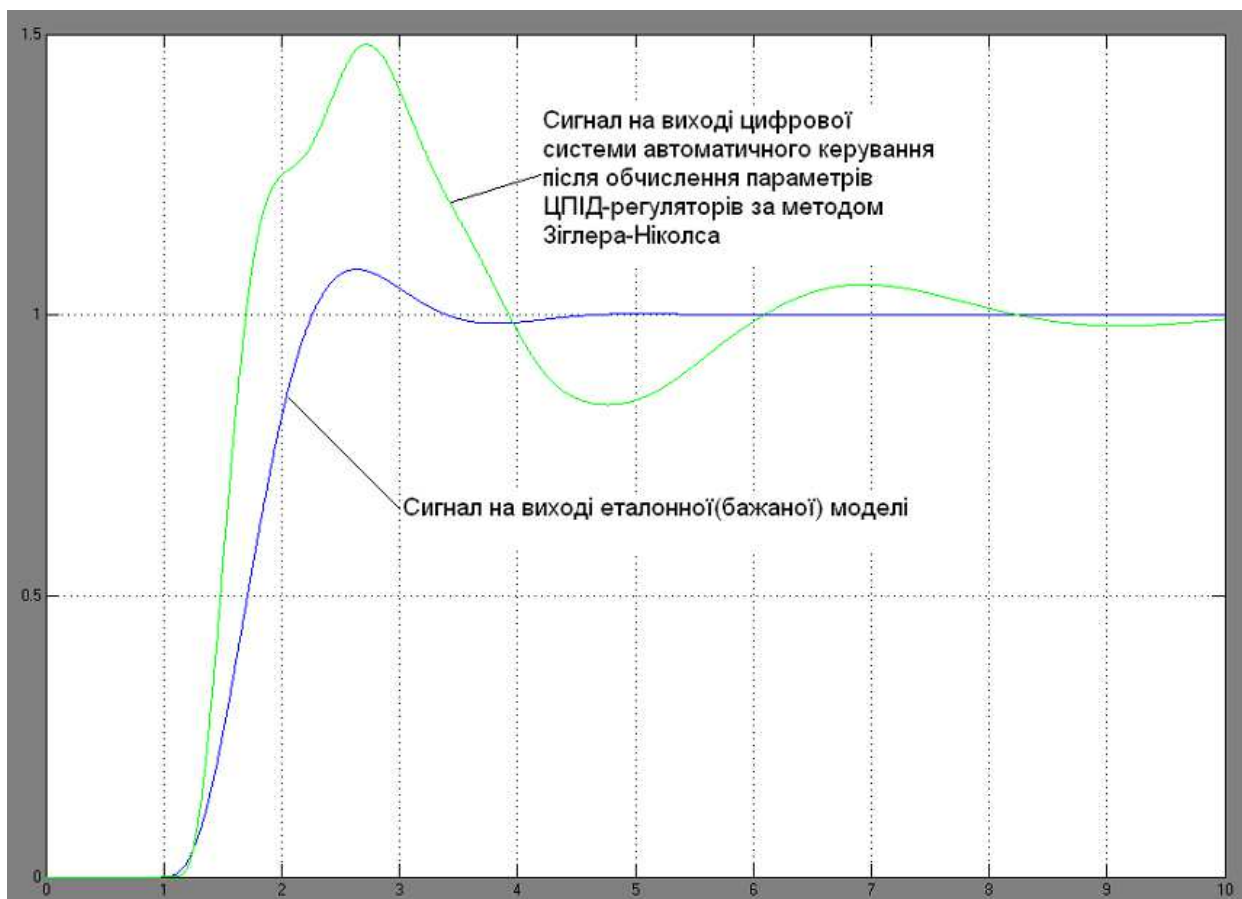


Рис.10.8. *Перехідні процеси на виході еталонної(бажаної) математичної моделі і математичної моделі ЦСАК із параметрами ЦПД-регуляторів $k_{p10} = 1.8, k_{i10} = 0.1125, k_{d10} = 3.6; k_{p20} = 0.6, k_{i20} = 0.0125, k_{d20} = 3.6$*

Третій етап. Для остаточної оптимізації (налаштуванні) параметрів ЦПД-регуляторів (рис.10.6) розв'язуємо задачу (10.2) із використанням чисельного методу нульового порядку, який носить назву метод Хука-Дживса (див. лекцію 9). В результаті отримуємо оптимальні: перехідний процес на виході ЦСАК (див. рис. 10.9); точку у шестивимірному просторі параметрів, які налаштовувалися; значення критерію $\hat{W}(\hat{k}_{p1} = 2, \hat{k}_{i1} = 0.1125, \hat{k}_{d1} = 6; \hat{k}_{p2} = 0.35, \hat{k}_{i2} = 0.000125, \hat{k}_{d2} = 2) = 0.002244$. Як бачимо, покращити якість перехідного процесу вдалося майже у 14 разів ($W / \hat{W} = 0.03232 / 0.002244 = 14.04$).

Запропоновану методику можливо використовувати на етапі підготовки дрону до польоту (попередній параметричний синтез ЦСАК) або для переналаштування ЦСАК в реальному часі (оперативний параметричний синтез).

При попередньому параметричному синтезі можливо врахувати усі детерміновані зміни параметрів ЦСАК і запам'ятати відповідні цим змінам найкращі значення параметрів ЦПД-регуляторів.

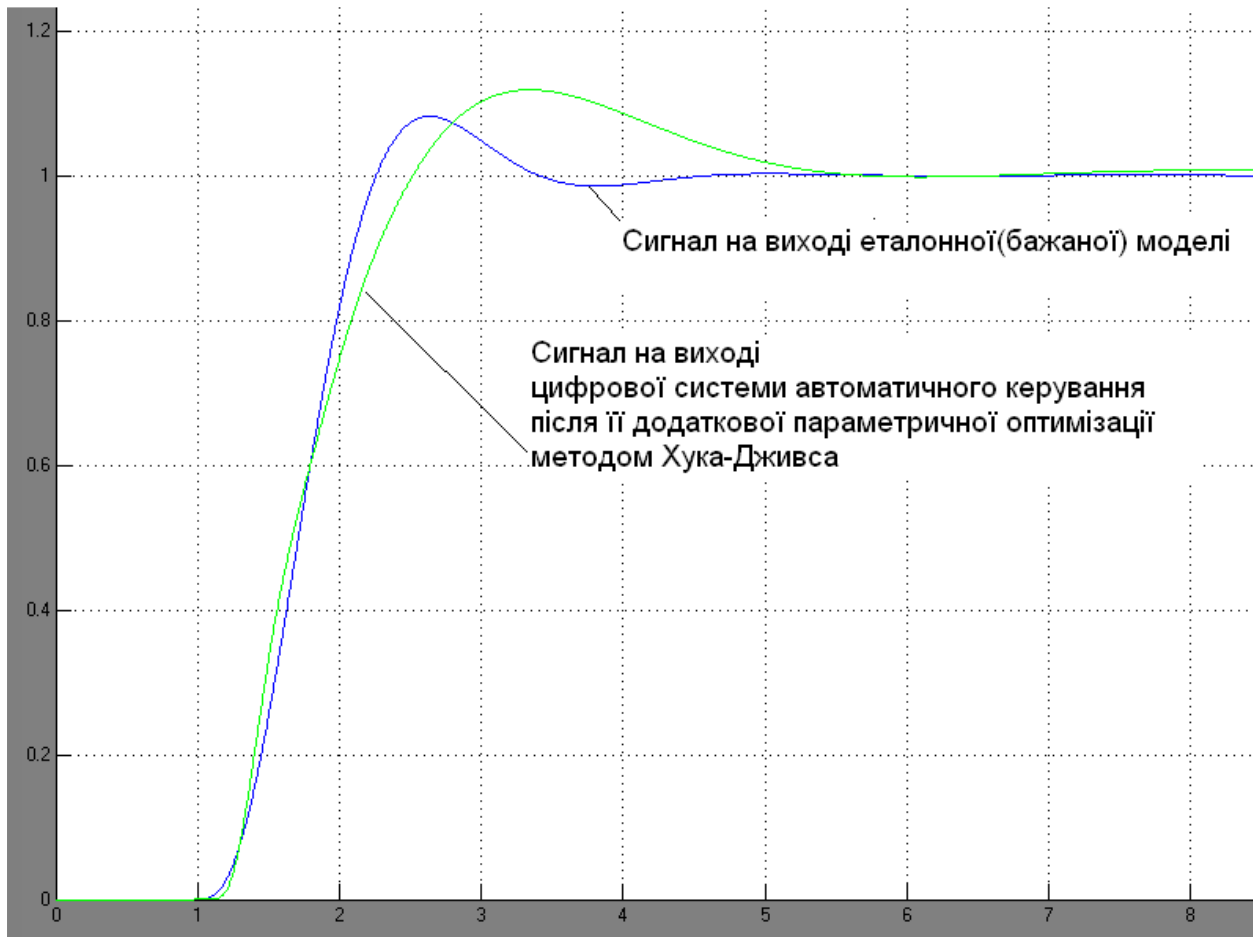


Рис. 10.9. *Перехідні процеси на виході еталонної(бажаної) математичної моделі і математичної моделі ЦСАК із оптимальними параметрами ЦПД-регуляторів $\hat{k}_{p1} = 2, \hat{k}_{i1} = 0.1125, \hat{k}_{d1} = 6; \hat{k}_{p2} = 0.35, \hat{k}_{i2} = 0.000125, \hat{k}_{d2} = 2$*

При оперативному параметричному синтезі в умовах невизначеності щодо знання моментів часу та величини зміни параметрів об'єкта керування (ОК), пропонується виконати наступні дії:

- перед початком застосування методики оперативно ідентифікувати параметри ОК;
- застосувати у наведеній методиці оновлену в результаті ідентифікації математичну модель ОК;
- застосовуючи спеціальні пошукові (зондуючі) сигнали до реального ОК уточнити знайдені за методикою значення параметрів ЦПД- регуляторів (тобто виконати третій етап методики використовуючи не математичну модель ЦСАК, а реально діючу ЦСАК).

При оперативному налаштуванні ЦПД- регуляторів виконання другого и третього етапів методики можливо виконувати або на базі бортового мікропроцесора, або із використанням технологій туманних чи хмарних обчислень.

Висновок

1 Новизна методики полягає у комплексному застосуванні методу Зіглера – Ніколса та чисельних методів нульового порядку. Метод Зіглера –Ніколса дозволяє отримати початкові умови, які забезпечують швидке наближення до

точки оптимуму при подальшому застосуванні чисельних методів нульового порядку. Якщо початкові умови задавати випадковим чином, то це призводить, у більшості випадків, до нестійкості ЦСАК і неможливості алгоритмічно обчислювати значення критерію.

2. Розрахунки підтвердили високу ефективність запропонованої методики порівняно із випадком застосування лише метода Зіглера-Ніколса. В розглянутому прикладі показник ефективності (критерію), за яким оцінювалась якість налаштування покращився майже у 14 разів.