

MAVZU 3: Mustahkamlik nazariyalari, ularni egilish bilan buralishning birgalikda ta'siridan mustahkamlikka hisoblashga tadbiiq etish. Dinamik kuchlar.

R JA:

1. Asosiy tushunchalar.
2. T kiskim yuzalarining statik va inertsia momentlari.
3. Oddiy shakllarning inertsia momentlari.
4. Markaziy o'qlar parallel ko'chirilganda inertsia momentini o'zgarishi.

Cho'zilish yoki siqilish deformatsiyalarini tekshirishda sterjenning ko'ndalang kesim yuzi shu sterjenning mustahkamlik va bikirliginiarakterl vchi miqd r ekanligini ko'rib o'tdik. Bunda kuchlanish ko'ndalang kesim yuzi bo'yicha tekis taqsimlangan edi. Amm g'ovalarning buralish va egilish deformatsiyasini hamda kuchlanishini tekshirishda uning mustahkamlik yoki bikirligini kesim yuzi emas, balki undan ko'ra murakkab q bo'lgan geometrikarakteristikalari aniqlaydi.

- Bular: 1) tekis kesim yuzalarining o'qqa nisbatan statik momentlari;
2) tekis kesim yuzalarining inersia momentlaridir.

Tekis kesim yuzalarining statik momentlari

Tekis kesim yuzasidan ajratilgan elementar yuzacha bilan shu yuzachadan oy o'qigacha bo'lgan masofalar rasidagi ko'paytmalar yig'indisi tekis kesim yuzasining O o'qiga nisbatan statik moment deb ataladi.

$$S_y = \int_A z dA \quad (6.1)$$

Xuddi shuningdek, yuzaning Oz o'qiga nisbatan lingan statik moment quyidagicha aniqlanadi:

$$S_z = \int_A y dA \quad (6.2)$$

Bu formulalardan statik momentning birligi sm^3 ekanligi ko'rinib turibdi.

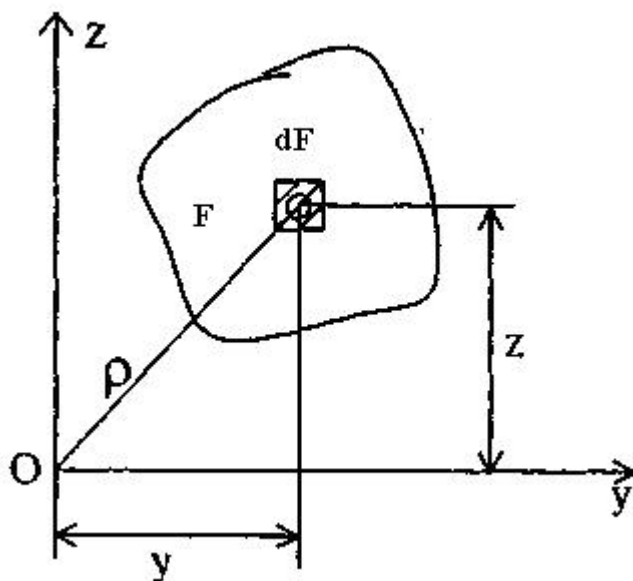
Statik moment hisblanadigan o'qlarning vaziyatiga qarab, ular musbat, manfiy va nol qiymatlarga ega bo'lishi mumkin (6.1-shakl).

Agar tekis kesim yuzasi g'irlik markazining koordinatalari ma'lum bo'lsa, u holda bu yuzaning statik momentlari quyidagicha ifodalardan topiladi:

$$\left. \begin{aligned} S_y &= A \cdot z_c \\ S_z &= A \cdot y_c \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Agar bir kesimning statik moment va yuzasi ma'lum bo'lsa, u holda kesim markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanishi mumkin:

$$y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A} \quad (6.4)$$

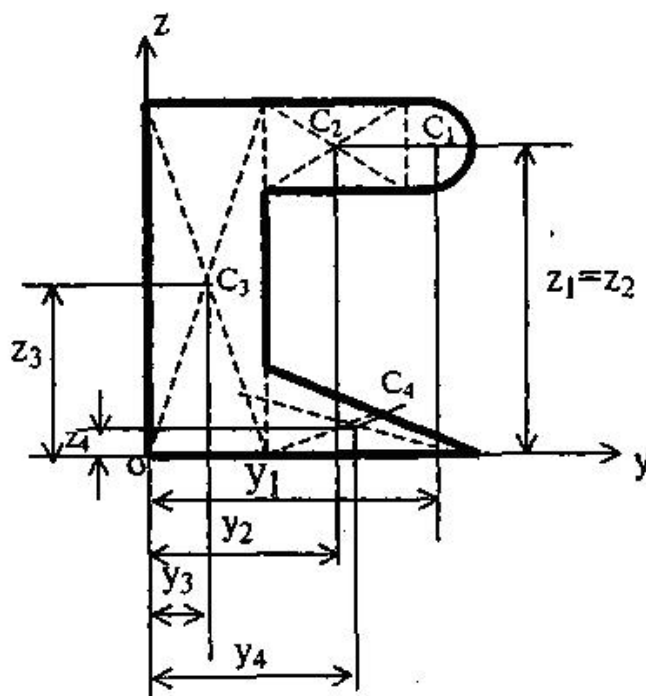


6.1-shakl

Bu formulalardan kelajakda muhim ahamiyatga ega bo'lgan xulosa kelib chiqadi.

Ya'ni: tekis kesim yuzlarining o'z markaziy o'qlariga nisbatan statik momentlari nolgateng.

Agar murakkab tekis kesim yuzasi berilgan bo'lsa, u holda, bu kesimning g'irlik markazini -ining koordinatalari va yuzalari ma'lum bo'lgan bir qancha oddiy shakllarga ajratib yubiriladi (6.2-shakl).



6.2-shakl

Murakkab kesim yuzasi g'irlik markazining koordinatalari quyidagicha formulalar bilan ifodalaniadi:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=0}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=0}^n A_i} \\ z_c &= \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 + \dots + A_n \cdot z_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=0}^n A_i \cdot z_i}{\sum_{i=0}^n A_i} \end{aligned} \right\} (6.5)$$

bunda A_1, A_2, \dots, A_n - ayrim shakllarning yuzalari, y_1, y_2, \dots, y_n va z_1, z_2, \dots, z_n ularning g'irlik markazlarining kordinatalari.

(6.5) formulalarning o'ng t m nidagi kasrlarning surati ayrim yuzalarning tegishli o'qlarga nisbatan **statik momentlaridir**.

Tekis kesim yuzalarining inersiya momentlari

Endi biz yana bir yangi geometrik xarakteristika, ya'ni **ekvat rial** yoki **o'qlarga nisbatan** lingan inersiya momentlari bilan tanishamiz. Kesim yuzasidan ajratilgan hamma elementar yuzachalarni ulardan o'qlargacha bo'lgan raliqlarni kvadratiga ko'paytmalarining yig'indisi, shu kesim yuzasining o'qlarga nisbatan inersiya momentlari deyiladi.

Ta'rifga ko'ra, tekis yuzaning O va Oz o'qlariga nisbatan inersiya momentlari quyidagicha aniqlanadi:

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad (6.6)$$

Kordinatalar boshiga nisbatan inersiya momenti esa

$$I_{\dots} = \int_A \dots^2 dA \quad (6.7)$$

ifoda yordamida aniqlanib, qutbiy inersiya momenti deyiladi.

Bu kattaliklar [sm^4] da o'lchanadi. 6.1-shakldan $\dots^2 = y^2 + z^2$ buni (6.7)ga qo'ysak,

$$I_{\dots} = \int_A \dots^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA \quad \text{bo'ladi}$$

yoki

$$I_{\dots} = I_y + I_z \quad (6.8)$$

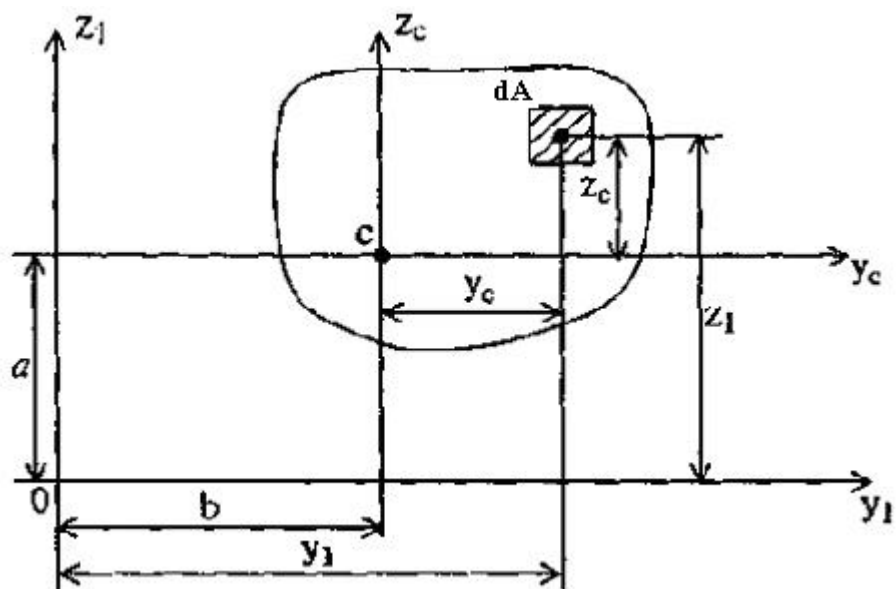
Kesim yuzasidan ajratilgan barcha elementar yuzalarni kordinata o'qlarigacha bo'lgan raliqlarga ko'paytmalarining yig'indisi shu kesimning **markazdan q chirma inersiya momenti** deyiladi:

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad (6.9)$$

Markazdan q chirma inersiya momentlarining qiymati **o'qlarning vaziyatiga** qarab, **musbat, manfiy** va **nol** bo'lishi mumkin. $I_y, I_z,$ va I_{yz} lar esa hamma vaqt musbat qiymatga ega bo'ladi.

Tekis kesim yuzasining markaziy o'qlarga parallel o'qqa nisbatan inersiya momenti

Tekis kesim yuzidan markaziy y_c va z_c o'qlarga nisbatan lingan inersiya momentlarining qiymatlarini $I_{y_c}, I_{z_c}, I_{y_c z_c}$ deb ligan edik. Endi tekis kesim yuzining markaziy o'qlarga parallel va ulardan a, b raliqlarda bo'lgan Oy_1 va Oz_1 o'qlarga nisbatan inersiya momentlarini aniqlaymiz (6.3-shakl).



6.3-shakl

Tekis kesim yuzining y_1 va z_1 o'qlarga nisbatan inersiya momentlarini (6.6) va (6.9) formulalar yordamida aniqlaymiz:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z_c + a)^2 dA = \int_A z_c^2 dA + 2a \int_A z_c dA + a^2 \int_A dA,$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y_c + b)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2b \int_A y_c dA + b^2 \int_A dA,$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y_c + b)(z_c + a) dA = \int_A y_c z_c dA + b \int_A z_c dA + a \int_A y_c dA + ab \int_A dA$$

Hisoblangan ifdalarning o'ng qismidagi birinchi integrallar markaziy o'qlarga nisbatan lingan inersiya momentlaridir:

$$I_{y_c} = \int_A z_c^2 dA, \quad I_{z_c} = \int_A y_c^2 dA \quad \text{va} \quad I_{y_c z_c} = \int_A y_c z_c dA$$

$\int_A y_c dA$ va $\int_A z_c dA$ integrallar esa markaziy o'qlarga nisbatan lingan statik momentlardir.

Bunday statik momentlar n lga tengligini avval qayd qilgan edik. Shunday qilib, yuqoridagi ifdalar quyidagicha yoziladi:

$$I_{y_1} = I_{y_c} + a^2 A, \quad I_{z_1} = I_{z_c} + b^2 A, \quad I_{y_1 z_1} = I_{y_c z_c} + abA \quad (6.10)$$

Bu formulalar o'qlar o'z-o'ziga parallel qilib, ko'chirilganda inersiya momentlarining o'zgargan qiymatlarini hisoblash formulalaridir.

Shunday qilib, (6.10) formulalar mana bunday **teorema** ifodalaydi:

Tekis kesim yuzining markaziy o'qlariga parallel o'tkazilgan o'qlarga nisbatan inersiya momentlari shu yuzadan markaziy o'qlarga nisbatan lingan inersiya momentlari bilan o'qlar orasidagi kvadratining kesim yuziga ko'paytmasi yig'indisiga teng. (Bu teorema-Gyugens-Shteyner teoremasi deb yuritiladi)

ODDIY KESIMLARNING INERSIYA MOMENTLARI

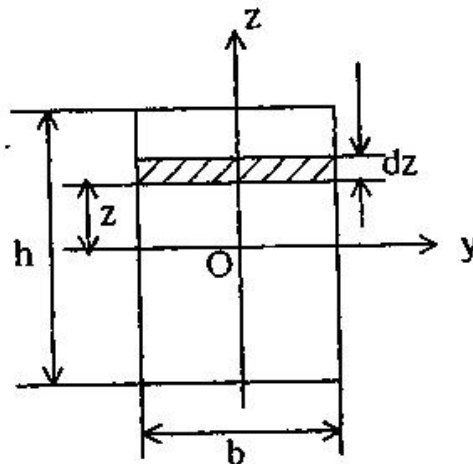
Tayanch iboralar

Bosh markaziy o'qlar – Inersiya momentlari maksimal yoki minimal qiymatlarga erishadigan o'qlar.

Bosh inersiya momentlari – bosh markaziy o'qlarga nisbatan hisoblangan inersiya momentlari

1. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi kesimning inersiya momentlari.

To'g'ri to'rtburchak shaklidagi kesim yuzining shu kesim markaziy o'qi O ga nisbatan inersiya momentini hisoblaymiz:



(6.6) formulaga binon, $I_y = \int_A z^2 dA$ bu h da elementar yuz $dA = b \cdot dz$ ga teng. Demak,

$$I_y = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{bh^3}{12} \quad \text{bo'ladi.}$$

Xuddi shuningdek oz o'qiga nisbatan I_z ni hisoblaymiz:

$$dA = h dy \quad \text{bo'lib, } I_z = \int_A y^2 dA \quad \text{dan } I_z = \frac{b^3 h}{12}$$

2. Kvadrat shaklidagi kesimning inersiya momentlari. Kvadrat shaklidagi kesim uchun $a=b=h$ bo'ladi. U h da

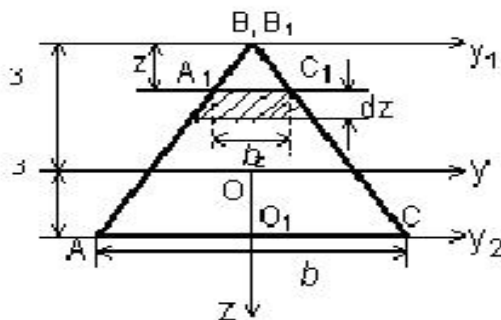
$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} \quad (7.1)$$

3. Uchburchak shaklidagi kesimning inersiya momentlari. Uchburchak shaklidagi kesimning inersiya momentini topish uchun dastlab uning uchidan asiga parallel o'tkazilgan y_1 o'qqa nisbatan inersiya momentini topamiz. (6.6) formulaga ko'ra:

$$I_{y_1} = \int_A z^2 dA$$

Bunda integral chegarasi O dan h gacha linadi. dA elementar yuzacha bo'lib, A_1C_1 asiga nisbatan cheksiz kichik trapetsiyaning yuziga tengdir. Bu trapetsiya yuzini to'g'ri to'rtburchak yuzi kabi aniqlasa bo'ladi.

$$dA = b_z \cdot dz$$



Bunda b_z -trapetsiyaning as si. Uni A_1BC_1 va ABC uchburchaklarning o'xshashligidan t pamiz:

$$\frac{b_z}{b} = \frac{z}{h}, \quad b_z = \frac{b}{h}z$$

u h lda

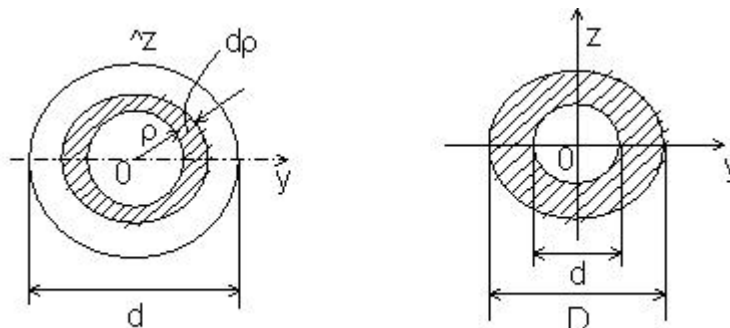
$$I_{y_1} = \frac{b}{h} \int_0^h z^3 dz = \frac{bh^3}{4} \quad (7.2)$$

Endi (6. 10) f rmulaning birinchisidan f ydalanib, markaziy oy o'qi va as sidan o'tgan O_1Y_2 o'qiga nisbatan inersiya m menti aniqlaymiz:

$$I_y = I_{y_1} - a_1^2 A = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} \quad (7.3)$$

$$I_{y_1} = I_y + a_2^2 A = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} \quad (7.4)$$

4. D ira shaklidagi kesimning inersiya m menti. Dastlab d iraning qutb inersiya m menti t pamiz.



Buning uchun d ira markazidan raliqda kengligi d ga teng bo'lgan halqasim n dF yuzacha ajaratamiz:

$$dA = 2 \cdot d \cdot dr$$

(6. 7) f rmulaga ko'ra

$$I_p = 2f \int_0^r r^3 dr = 2f \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^r = \frac{f r^4}{2} = \frac{f d^4}{32} \cong 0,1d^4$$

Demak, d iraning qutb inersiya m menti quyidagicha ekan:

$$I_p = \frac{f r^4}{2} = \frac{f d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad (7.5)$$

Endi d iraning ekvat rial inersiya m menti (6.8) f rmuladan t pamiz. D ira y va oz o'qlarga nisbatan simmetrik shakl bo'lganligidan uning bu o'qlarga nisbatan inersiya m mentlari o'zar teng bo'ladi:

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2}$$

Bu formulaga I ning qiymatini (7.5) dan lib kelib qo'ysak

$$I_y = I_z = \frac{I_{\dots}}{2} = \frac{fr^4}{4} = \frac{fd^4}{64} \approx 0.05d^4 \quad (7.6) \quad \text{kelib chiqadi.}$$

5. Halqasim n kesimning inersiya m menti. Halqasim n kesimning y va oz o'qlariga nisbatan inersiya m mentlari bir-biriga teng bo'lib tashqi va ichki d iralarining shu o'qlarga nisbatan lingan inersiya m mentlari ayirmasiga tengdir.

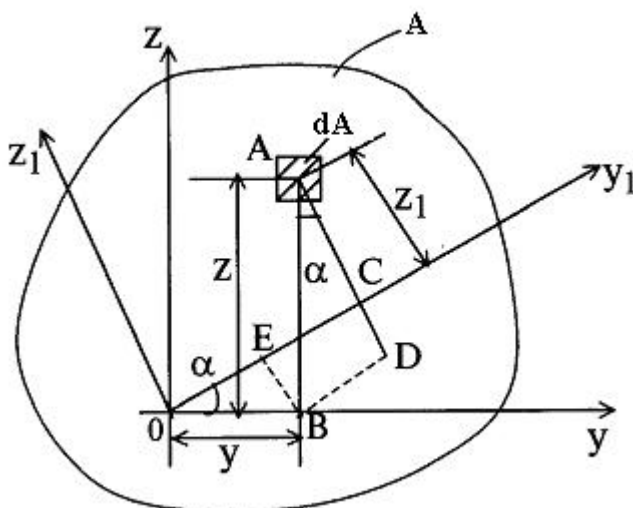
$$I_y = I_z = \frac{fD^4}{64} - \frac{fd^4}{64} = \frac{fd^4}{64}(1-c^4) \quad (7.7)$$

bunda $c = \frac{d}{D}$

Qutb inersiya m menti esa (7.5) ga as san aniqlanadi, ya'ni

$$I_{\dots} = \frac{fD^4}{32} - \frac{fd^4}{32} = \frac{fd^4}{32}(1-c^4) \quad (7.8)$$

6. K rdinata o'qlari burilganda inersiya m mentlarining o'zgarishi. Yuзи A bo'lgan tekis shakl uchun z k rdinatalar sistemasini ixtiyoriy ravishda lamiz (chizmaga qarang). OY va OZ o'qlariga nisbatan inersiya m mentlari I_y, I_z, I_{yz} his blangan bo'lsin.



K rdinatalar sistemasining y va oz o'qlarini s at strelkasining yurishiga teskari t m nga qarab bir r burchakka buramiz. Bunday burilgan burchak musbat deb qaraladi.

Tekis kesimning h sil bo'lgan yangi k rdinatalar sistemasi y_1oz_1 ga nisbatan inersiya m mentlari I_{y_1}, I_{z_1} va $I_{y_1z_1}$ larni aniqlaymiz.

Buning uchun eski va yangi o'qlarga nisbatan k rdinatalar rasidagi mun sabatlarni aniqlaymiz:

$$y_1 = \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{BD} = y \cos r + z \sin r, \quad (7.9)$$

$$z_1 = \overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD} = \overline{AD} - \overline{BE} = z \cos r - y \sin r, \quad (7.10)$$

Bu tengliklardan f ydalanib, tekis kesim yuzining yangi o'qlarga nisbatan inersiya m mentlarini aniqlaymiz:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z \cos r - y \sin r)^2 dA = \cos^2 r \int_A z^2 dA - 2 \sin r \cdot \cos r \int_A yz dA + \sin^2 r \int_A y^2 dA$$

yoki
$$I_{y_1} = I_y \cos^2 r + I_z \sin^2 r - I_{yz} \sin 2r$$

Xuddi shuningdek:

$$I_{z_1} = I_y \sin^2 r + I_z \cos^2 r + I_{yz} \sin 2r \quad \text{bo'ladi}$$

Endi markazdan q chirma inersiya m mentini his blaymiz:

$$I_{y_1 z_1} = \int_A (y \cdot \cos r + z \cdot \sin r)(z \cdot \cos r - y \cdot \sin r) dA = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2r + I_{yz} \cos 2r$$

Shunday qilib:

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 r + I_z \sin^2 r - I_{yz} \sin 2r \quad (7.11)$$

$$I_{z_1} = I_y \sin^2 r + I_z \cos^2 r + I_{yz} \sin 2r \quad (7.12)$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2r + I_{yz} \cos 2r \quad (7.13)$$

(7.11) va (7.12) tenglamalarni qo'shsak quyidagi ifodalarni hosil bo'ladi:

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_{\dots} \quad (7.14)$$

$$I_{y_1} - I_{z_1} = (I_y - I_z) \cos 2r - 2I_{yz} \sin 2r \quad (7.15)$$

kelib chiqadi.

(7.14) formuladan ko'rinib turibdiki, o'zaro tik o'qlar burilganda bu o'qlarga nisbatan lingan inersiya momentlarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lib, qutb inersiya momentiga tengdir. (7.15) munosabatdan y, z va y_1 va z_1 o'qlariga nisbatan ekvivalent inersiya momentlari ma'lum bo'lgan holda y, z o'qlarga nisbatan lingan markazdan qochirma inersiya momentini aniqlash mumkin bo'ladi.

Bosh inersiya o'qlari va bosh inersiya momentlari

(7.11), (7.12) va (7.13) formulalardan ko'rinadiki, burchakning o'zgarishi bilan I_{y_1}, I_{z_1} va $I_{y_1 z_1}$ larning miqdorlari ham o'zgaradi.

Ularning bir vaqtida keyin I_{y_1}, I_{z_1} miqdorlari ekstremal qiymatga erishishi mumkin. Bunday holda mas'ul keladigan burchakning qiymatini topish uchun (7.11) dan bo'yicha hosil olingan tenglamani tenglaymiz:

$$\frac{dI_{y_1}}{dr} = -2I_y \sin r \cos r + 2I_z \sin r \cos r - 2I_{yz} \cos 2r = 0$$

$$(I_z - I_y) \sin 2r = 2I_{yz} \cos 2r$$

$$\operatorname{tg} 2r = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \quad (7.16)$$

hosil bo'ladi.

Bu formuladan burchakning bir-biridan 90° ga farq qiluvchi ikki qiymatga ega bo'ladi. Bu qiymatlar ikki o'qning vaziyatini aniqlaydi: ulardan biriga nisbatan inersiya momenti maksimal qiymatga ega bo'lsa, ikkinchisiga nisbatan minimal qiymatga ega bo'ladi. Bunday o'qlarni **bosh markaziy o'qlar** deb, bu o'qlarga nisbatan hisoblangan inersiya momentlari esa **bosh inersiya momentlari** deb ataladi.

Agar bosh o'qlarni u va v bilan belgilasak, u holda (7.14) va (7.16) formulalardagi burchak o'rniga α ni qo'yib, bosh inersiya momentlarini topish uchun quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$I_u + I_v = I_y + I_z = I_{\dots} \quad (7.14)$$

$$I_u - I_v = (I_y - I_z) \cos 2\alpha - 2I_{yz} \sin 2\alpha \quad (7.15)$$

Markazdan qochirma inersiya momenti I_{yz} ning ifodasini (7.16) dan topib (7.15) formulaga qo'yib, hosil bo'lgan tenglamani (7.14) formula bilan hadlab qo'shsak, u bosh o'qqa nisbatan lingan bosh inersiya momenti chiqadi:

$$I_u = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z \sin^2 2\alpha}{2 \cos 2\alpha} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2 \cos 2\alpha}$$

Bu yerdagi $1/\cos 2\alpha$ ni (7.16) formuladan foydalanib, quyidagi ifodalarni almashiramiz:

$$\frac{1}{\cos 2r_0} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2r_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{4I_{yz}^2}{(I_y - I_z)^2}}$$

u h lida

$$I_{\frac{u}{v}} = I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{1}{2} \left[(I_y + I_z) \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right] \quad (7.17)$$

bo'ladi.

Agar (7.13) formuladagi ish ralarini b sh o'qlarga tegishli ish ralar bilan almashtirsak, quyidagi if da h sil bo'ladi:

$$I_{uv} = \frac{1}{2} (I_y - I_z) \sin 2r_0 \pm I_{yz} \cos 2r_0 = 0$$

bundan (7.16) formula h sil bo'ladi

$$\operatorname{tg} 2r_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

Bu esa u va v o'qlar b sh o'qlar ekanligidan dal lat beradi. Demak, b sh o'qlarga nisbatan **markazdan q chirma** inersiya m menti n lga tengdir ($I_{uv}=0$)

Shunday qilib, b sh o'qlar quyidagi usuliyatlarga ega bo'ladi:

- 1) b sh o'qlarga nisbatan har d im $I_{uv}=0$.
- 2) b sh o'qlarga nisbatan inersiya m mentlari ekstremal qiymatga ega, ya'ni I_{\max} , I_{\min} ga teng.

Agar u va v b sh o'qlar kesimning g'irlik markazidan o'tsa, ular markaziy b sh o'qlar deyiladi.

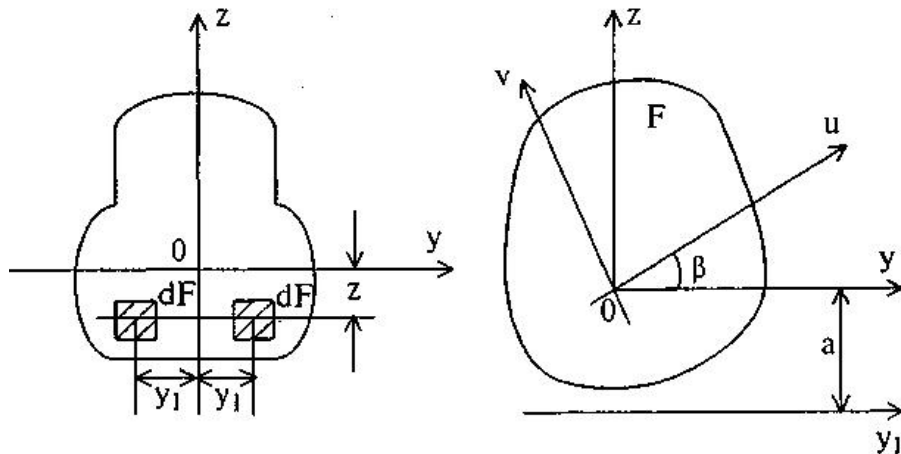
Agar tekis shakl bir r simmetriya o'qiga ega bo'lsa, u h lida bu simmetriya o'qi markaziy b sh o'qlardan biri bo'ladi, ikkinchisi esa kesim markazidan unga tik yo'naladi. Darhaqiqat, OZ o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan tekis kesimning markazdan q chirma inersiya m mentini his blasak,

$$I_{yz} = \int_A yz \, dA = \int_{A_1} yz \, dA + \int_{A_2} yz \, dA$$

A_1 va A_2 yuzalar oz o'qining o'ng va chap t m nlarida simmetrik j ylashgan, shu sababli:

$$\int_{A_1} yz \, dA = - \int_{A_2} yz \, dA \quad \text{bo'ladi.}$$

Demak, markazdan q chirma inersiya m menti n lga teng: $I_{yz} = 0$.



Shunday qilib, kesim yuzining simmetrik o'qi uning b sh o'qi bo'ladi. Agar bir r tekis kesim yuzi uchun uning b sh o'qlariga nisbatan inersiya m mentlari, ya'ni I_u, I_v ma'lum bo'lsa, u h lida istalgan markaziy o'qqa nisbatan inersiya m mentini t pish mumkin:

$$I_y = I_u \cos^2 S + I_v \sin^2 S$$

$$I_z = I_u \sin^2 \vartheta + I_v \cos^2 \vartheta$$

$$I_{yz} = \frac{1}{2}(I_u - I_v) \sin 2\vartheta \quad (7.18)$$

Agar y_1 o'qi kesimning markazidan o'tmasa, u holda y o'qini unga parallel qilib buramiz va kesim yuzining y o'qqa nisbatan inersiya momentini quyidagi formuladan aniqlaymiz:

$$I_{y_1} = I_y + a^2 A$$

Bunda I_y (7.18) formuladan aniqlanadi.

7. Tekis kesim yuzalarining inersiya radiuslari to'g'risida tushuncha. Biz ilgari ekvatorial inersiya momentlarining umumiy formulasini quyidagicha yozgan edik:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

z^2 o'rtacha qiymatini qo'ysak,

$$I_y = \int_A z^2 dA = r_y^2 A \text{ bo'ladi. Shunga o'xshash: } I_z = r_z^2 A \text{ bunda } r_y \text{ va } r_z \text{ lar kesim yuzasining}$$

oy va oz o'qlariga nisbatan inersiya radiuslari deyilib, santimetrlarda o'lchanadi. Demak, inersiya radiuslarini kesimning inersiya momenti va uning yuzasi orqali ifodalash mumkin:

$$I_y = r_y^2 A; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}};$$

$$I_z = r_z^2 A; \quad r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

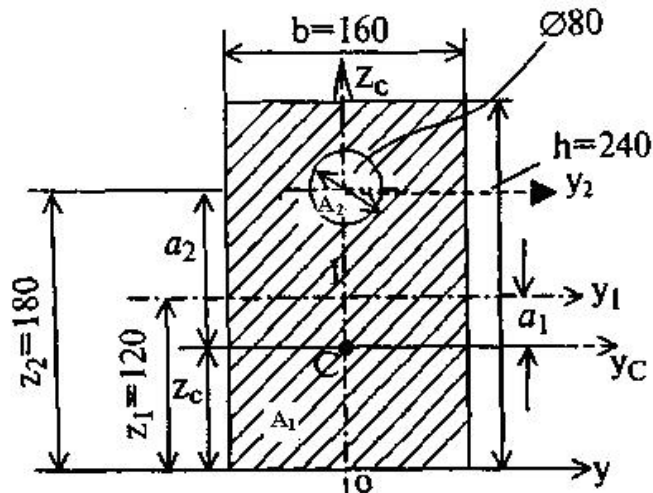
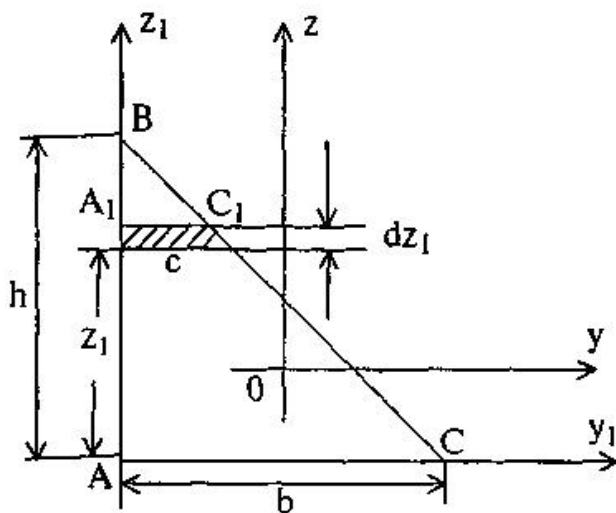
Huddi shuningdek, bosh o'qlarga nisbatan ham:

$$r_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}, \quad r_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} \quad (4.19)$$

Bu bosh inersiya radiuslari yordamida berilgan kesim uchun inersiya ellipsini chizish mumkin. Bu ellips yordamida berilgan kesimning inersiya momentini har qanday o'qqa nisbatan grafik usulda topish mumkin. Ellips kanturiga, kesimning inersiya momenti topiladigan o'qqa parallel ravishda urinma o'tkaziladi. Bu urinma bilan o'qarasidagi masofani belgili masshtabda topib, uning kvadratini kesim yuzasiga ko'paytirilsa, shu kesim yuzining talab qilingan o'qqa nisbatan inersiya momenti hisoblanadi.

Masalalar

1-masala. To'g'ri burchakli ABC uchburchak yuzasining katetlariga parallel bo'lgan markaziy y va oz o'qlariga nisbatan markazdan qochirma inersiya momentlari va asosidan o'tuvchi Ay_1 o'qqa nisbatan inersiya momenti hisoblan.



Yechish: Avval uchburchakning katetlaridan o'tuvchi o'qlarga nisbatan markazdan q chirma inersiya momentlarini topamiz:

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA, \text{ bunda } dA = c \cdot dz_1$$

ABC va A_1BC_1 uchburchaklarning o'xshashligidan

$$\frac{y_1}{b} = \frac{h - z_1}{h}; \quad y_1 = \frac{b}{h}(h - z_1)$$

ni topamiz,

$$y_1 = \frac{b}{h}(h - z_1)$$

Bunda demak

bo'ladi

$$I_{y_1 z_1} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h - z_1)^2 z_1 dz_1 = \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right]$$

yoki

$$I_{y_1 z_1} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

bo'ladi.

Markaziy o'qlarga nisbatan markazdan q chirma inersiya momentini (6.10) formulaning uchinchisidan aniqlaymiz:

$$I_{yz} = I_{y_1 z_1} - a \cdot b F = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{b^2 h^2}{18} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

yoki

$$I_{yz} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

bo'ladi.

Endi uchburchakning asosidan o'tgan A_1 o'qqa nisbatan inersiya momentini (7.4) formuladan topamiz:

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}$$

2-masala. Yuqorida keltirilgan to'g'ri to'rtburchak kesim yuzining shu kesim g'irlik markazidan o'tgan o'qqa nisbatan inersiya momenti aniqlansin. O'lchamlar millimetr hisbida berilgan.

Yechish: Kesim g'irlik markazining koordinatlarini ixtiyoriy lingan o'z koordinatlar sistemasiga nisbatan aniqlaymiz:

$$z_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{A_1 z_1 - A_2 z_2}{A_1 - A_2} = \frac{24 \cdot 16 \cdot 12 - \frac{3.14 \cdot 8^2}{4} \cdot 18}{24 \cdot 16 - \frac{3.14 \cdot 8^2}{4}} \cdot 10^{-2} m = 11.1 \cdot 10^{-2} m = 11.1 \text{ sm}$$

demak C (0; 11,1).

To'g'ri to'rtburchakning y o'qiga nisbatan inersiya momentini aniqlaymiz:

$$I'_y = I'_{y_1} + A_1 \cdot a_1^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - z_c \right)^2 = \frac{16 \cdot 24^3}{12} + 16 \cdot 24 \cdot 0.9^2 = 18743 \text{ sm}^4$$

$$I''_y = I''_{y_2} + A_1 \cdot a_2^2 = \frac{fd^4}{64} + \frac{fd^4}{4} (z_2 - z_c)^2 = \frac{3.14 \cdot 8^4}{64} + \frac{3.14 \cdot 8^4}{4} (18 - 11.1)^2 = 2593 \text{ sm}^4$$

Hamma kesimning y o'qiga nisbatan inersiya momentini aniqlaymiz:

$$I_y = I'_y - I''_y = 18743 - 2593 = 16150 \text{ sm}^4.$$

Hamma kesimning z o'qiga nisbatan inersiya momenti:

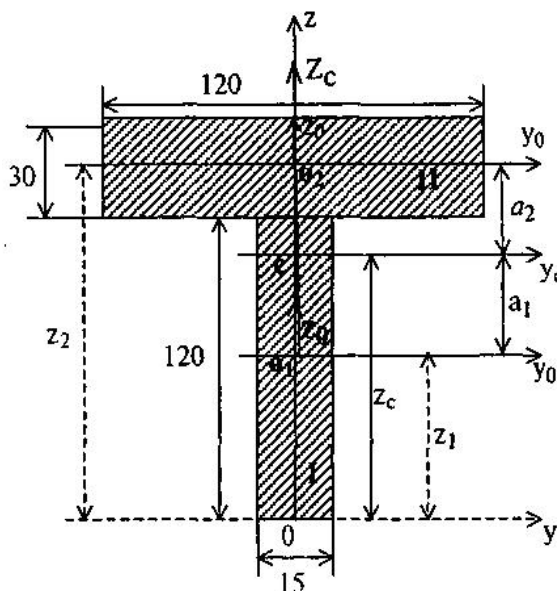
$$I_z = \frac{b^3 h}{12} - \frac{f d^4}{64} = \frac{24 \cdot 16^3}{12} - \frac{3.14 \cdot 8^4}{64} = 7991 \text{ sm}^4.$$

3-masala. Tavr shaklli kesim g'irlik markazining k rdinatalari va b sh inersiya m mentlari t pilsin. O'Ichamlar mm his bida berilgan.

Yechish. Berilgan shakl murakkab bo'lgani uchun uni ikki to'g'ri to'rtburchakka ajratamiz. Shaklning simmetriya o'qi uning g'irlik markazi c nuqtadan o'tadi. Ya'ni $y_c=0$ bo'ladi. Og'irlik markazining k rdinatasi z_c nigina z o'qidan his blaymiz:

$$z_c = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2} = \frac{1.5 \cdot 12 \cdot 6 + 3 \cdot 12 \cdot 13.5}{1.5 \cdot 12 + 3 \cdot 12} = 11 \text{ sm}$$

Demak c (0;11) bo'ladi.



y va z o'qlari b sh o'qlar bo'ladi. Endi har bir to'g'ri to'rtburchakning o'z markaziy o'qiga nisbatan inersiya m mentlarini his blaymiz:

$$I'_{y_0} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1.5 \cdot 12^3}{12} = 216 \text{ sm}^4; \quad I'_{z_0} = \frac{b_1^3 h_1}{12} = \frac{12 \cdot 1.5^3}{12} = 3.38 \text{ sm}^4,$$

$$I''_{y_0} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{12 \cdot 3^3}{12} = 27 \text{ sm}^4; \quad I''_{z_0} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{3 \cdot 12^3}{12} = 432 \text{ sm}^4$$

To'g'ri to'rtburchaklarning markaziy o'qlarini y_0 va z_0 desak bo'ladi.

Har bir to'g'ri to'rtburchakning b sh y va z o'qlarga nisbatan inersiya m mentlarini his blaymiz:

I to'g'ri to'rtburchak uchun:

$$I'_y = I'_{y_0} + A_1 \cdot a_1^2 = 216 + 5^2 \cdot 1.5 \cdot 12 = 666 \text{ sm}^4$$

$$I'_z = I'_{z_0} + A_1 \cdot b_1^2 = 3.38 \text{ sm}^4; \quad b_1 = 0$$

II to'g'ri to'rtburchak uchun:

$$I''_y = I''_{y_0} + A_2 \cdot a_2^2 = 27 + 2.5^2 \cdot 12 \cdot 3 = 252 \text{ sm}^4$$

$$I''_z = I''_{z_0} + A_2 \cdot b_2^2 = 432 \text{ sm}^4; \quad \text{chunki } b_2 = 0$$

Kesimning b sh inersiya m mentini his blaymiz:

$$I_y = I'_y + I''_y = 666 + 252 = 918 \text{ sm}^4,$$

$$I_z = I'_z + I''_z = 3.38 + 432 = 435.38 \text{ sm}^4.$$

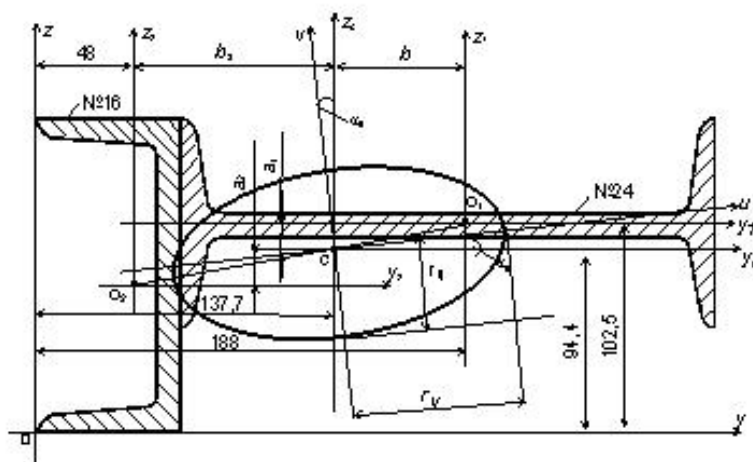
Natijada shuni qayd qilib o'tish kerakki, b sh o'q z kesimni tashkil etuvchi to'g'ri to'rtburchakning markaziy o'qi bilan ustma-ust tushadi, shu sababli $b_1=b_2=0$ bo'ladi.

4-masala. 24 n merli qo'shtavr bilan 16^a n merli shvellerdan tashkil t pgan kesim yuzasi uchun:

1) g'irlik markazining k rdinatalari aniqlansin;

- 2) g'irlik markazi rqli o'tadigan y_c va z_c o'qlarga nisbatan ekvat rial va markazdan q chirma inersiya m mentlari t pilsin;
- 3) b sh markaziy o'qlarning yo'nalishi aniqlansin;
- 4) b sh markaziy o'qlarga nisbatan inersiya m mentlarining qiymati t pilsin.
- Zarur bo'ladigan quyidagi ma'lum t larni jadvaldan lamiz [2]

Qo'shtavr 24	Shveller 16 ^a
$h=240$ mm	$h=160$ mm
$b=115$ mm	$b=68$ mm
$A_1=34.8$ sm ²	$y_0=20$ mm
$I_{y1}=198$ sm ⁴	$A_2=19.5$ sm ²
$I_{z1}=3460$ sm ⁴	$I_{y2}=823$ sm ⁴ ; $I_{z2}=78.8$ sm ⁴



Yechish. Berilgan kesimning g'irlik markazini y_c va z_c o'qlarga nisbatan aniqlaymiz:

$$z_c = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2} = \frac{34.8 \cdot 10.25 + 19.5 \cdot 8}{54.3} = 9.44 \text{ sm};$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{34.8 \cdot 18.8 + 19.5 \cdot 4.8}{54.3} = 13.77 \text{ sm}$$

T pilgan k rdinalarni qabul qilingan ma'lum masshtabda chizmaga qo'yib, g'irlik markazi c dan o'qlar o'tkazamiz.

Kesim yuzining markaziy y_c va z_c o'qlarga nisbatan inersiya m mentlarini t pamiz:

$$I_{y_c} = I_{y_1}' + A_1 \cdot a_1^2 + I_{y_2}'' + A_2 \cdot a_2^2$$

va

$$I_{z_c} = I_{z_1}' + A_1 \cdot b_1^2 + I_{z_2}'' + A_2 \cdot b_2^2$$

bunda chizmadan a_1, a_2, b_1, b_2 larni aniqlaymiz:

$$a_1 = 10.25 - 9.44 = 0.81 \quad ; \quad b_1 = 18.8 - 13.77 = 5.03 \text{ sm},$$

$$a_2 = 8 - 9.44 = -1.44 \quad ; \quad b_2 = 4.8 - 13.77 = -8.97 \text{ sm},$$

$$I_{y_c} = 198 + 34.8(0.81)^2 + 82.3 + 19.5(-1.44)^2 = 1084.27 \text{ sm}^4;$$

$$I_{z_c} = 3460 + 34.8(5.03)^2 + 78.8 + 19.5(-8.97)^2 = 5988.21 \text{ sm}^4.$$

Kesimning markazdan q chirma inersiya m mentini y_c va z_c o'qlarga nisbatan t pamiz:

$$I_{y_c z_c} = A_1 \cdot a_1 \cdot b_1 + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2 = 34.8 \cdot 0.81 \cdot 5.03 + 19.5(-1.44) \cdot (-8.97) = 421.72 \text{ sm}^4$$

Kesim markaziy b sh o'qlarining yo'nalishini (7.16) formula asida t pamiz:

$$\operatorname{tg} 2r_0 = -\frac{2I_{y_c z_c}}{I_{y_c} - I_{z_c}} = -\frac{2 \cdot 421,72}{1084,27 - 5988,21} = 0,47$$

$$2r_0 = 9^{\circ}48', \quad r_0 = 4^{\circ}54'$$

r_0 burchak markaziy b sh o'q u ning $0+90^{\circ}$ burchak esa markaziy b sh o'q v ning yo'nalishini aniqlaydi.

B sh markaziy u va v o'qlarga nisbatan b sh inersiya momentlarini (7.17) formula asida his blaymiz:

$$I_{\frac{v}{u}} = I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{y_c} - I_{z_c})^2 + 4I_{y_c z_c}^2} = 3536,24 \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(-4903,94)^2 + 4(421,72)^2} = 3536,24 \pm 2487,07$$

shunday qilib,

$$I_v = I_{\max} = 6024,21 \text{ sm}^4$$

$$I_u = I_{\min} = 1048,27 \text{ sm}^4$$

tekshirish

$$I_u + I_v = I_{y_c} + I_{z_c} :$$

$$6024,21 + 1048,27 = 1084,27 + 5988,21$$

$$7072,48 = 7072,48$$

Bu tekshirish natijasi his bning to'g'ri o'tkazilganligini ko'rsatadi.

Endi b sh inersiya radiuslarini his blaymiz:

$$r_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{6024,21}{54,3}} = 10,40 \text{ sm}$$

$$r_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{1048,27}{54,3}} = 4,93 \text{ sm}$$

Endi inersiya ellipsini chizish mumkin, buning uchun u o'qi bo'yicha r_v ni v o'qi bo'yicha r_u ning qiymatlarini ma'lum masshtabda qo'yib, chizmada ko'rsatilgan ellips chiziladi.