

---

---

«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ  
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

---

---

Лекція 2

**Класифікація випадкових процесів**

2.1. Основні типи випадкових процесів

2.2. Стаціонарні випадкові процеси.

2.3. Випадкові процеси з незалежними приростами.

2.4. Марковські випадкові процеси.

2.1. Основні типи випадкових процесів

Зупинимося на питанні про те, як класифікують випадкові процеси.

У теорії випадкових процесів прийнято класифікувати їх за тими чи іншими ознаками. Сама елементарна класифікація - «за часом» і «за станами». Для того, щоб про неї розповісти, зауважимо, що при вирішенні практичних завдань зазвичай припускають, що випадковий процес протікає в деякій системі  $S$ . Під системою може

розумітися що завгодно: технічний пристрій, ремонтна майстерня, залізничний вузол, біологічна популяція і т.д. Випадковий процес який задано у деякій системі, являє собою випадкові переходи системи зі стану в стан. Стан системи може бути охарактеризованим за допомогою певних числових змінних.

**Приклад.** Електронний банкомат в операційному залі банку може знаходитися в одному з трьох станів:  $S_1$  – справний, працює;  $S_2$  – несправний, відключений;  $S_3$  – ремонтується.

#### Означення 2.1

Випадковий процес  $X(t)$  називається **процесом з дискретним часом**, якщо система, в якій його задано може змінювати свої стани лише у моменти часу, число яких є скінченим або зліченим (тобто множина  $T$  – множина моментів часу, коли система змінює свої стани, є дискретним).

Прикладом може бути процес купівлі акцій різних компаній, до того ж стан компанії може змінюватись (компанія переживає рецесію, стагнацію, бум) у моменти часу  $t_1, t_2, t_3, \dots$

Перетини випадкового процесу з дискретним часом утворюють послідовність випадкових величин, тому випадкові процеси з дискретним часом називають також випадковою послідовністю або *часовими рядами*.

#### Означення 2.2

Випадковий процес  $X(t)$  називається **процесом з неперервним часом**, якщо переходи системи із стану в стан можуть відбуватись у довільний момент часу обраного періоду. Для процесу з неперервним часом множина  $T$  – множина моментів часу, коли система змінює свої стани, є незліченою, тобто  $T$  – деякий проміжок дійсної осі .

Прикладом процесу з неперервним часом є броунівський рух частинок під мікроскопом.

### Означення 2.3

Випадковий процес  $X(t)$ , який задано в деякій системі  $S$ , називається **процесом з дискретними станами**, якщо у довільний момент часу  $t$  множина станів є скінченою або зліченою множиною, тобто перерізи таких процесів у довільний момент часу є дискретними випадковими величинами (вони можуть бути одновимірними або багатовимірними)

### Означення 2.4

Випадковий процес  $X(t)$  називається **процесом з неперервними станами**, якщо його перетини у довільний момент часу  $t$  є неперервними випадковими величинами

Таким чином в залежності від характеру зміни аргументу і будови фазового простору усі випадкові процеси ділять на чотири класи (групи):

1. *Дискретний процес (дискретне стан) з дискретним часом.*
2. *Дискретний процес з неперервним часом.*
3. *Неперервний процес (неперервний стан) з дискретним часом.*
4. *Неперервний процес з неперервним часом.*

Окрім представленої класифікації можливими є і інші. Більш змістовною є класифікація випадкових процесів по характеру залежності між значеннями  $X(t)$  у різні моменти часу  $t$ :

1. *Випадкові процеси з незалежними значеннями;*

2. Випадкові процеси з незалежними приростами;
3. Марковські випадкові процеси;
4. Стаціонарні випадкові процеси;
5. Мартингали.

## 2.2. Стаціонарні випадкові процеси.

Важливим класом випадкових процесів є стаціонарні випадкові процеси. Цей клас містить процеси, що є стійкими за часом.

### Означення 2.5

Випадковий процес  $X(t)$  називається **стаціонарним в узькому сенсі**, якщо всі функції розподілу є інваріантними відносно зсуву за часом, тобто при довільних  $n$  та  $t_0$  є справедливою рівність:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Це означає, що ймовірнісні характеристики стаціонарного випадкового процесу  $X(t)$  не змінюються при зміні відліку часу спостереження на довільне значення  $t_0$ . Зрозуміло, що аналогічна рівність має виконуватись і для щільностей ймовірностей:

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{t_1 - t_0, t_2 - t_0, \dots, t_n - t_0}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

а також для характеристичних і кореляційних функцій та функцій моментів.

З співвідношення (2.1) для одновимірного випадку маємо

$$f_{t_1}(x_1) = f_{t_1 - t_1}(x_1) = f(x_1), \text{ якщо } t_0 = t_1.$$

Тобто одновимірна щільність ймовірності стаціонарного у вузькому сенсі випадкового процесу взагалі не залежить від часу.

Двовимірний закон розподілу залежить лише від різниці моментів, для яких обрано ординати випадкових функцій. Дійсно,

$$f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = f_{t_1 - t_1, t_2 - t_1}(x_1, x_2) = f_{0, \tau}(x_1, x_2)$$

Математичне сподівання стаціонарного в вузькому сенсі випадкового процесу також не залежить від часу:

$$m_X = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Корреляційна і коваріаційна функції залежать лише від різниці аргументів  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\rho_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\tau}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \rho_X(\tau)$$

$$\text{cov}_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} - EX(t_1)EX(t_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X)(x_2 - m_X) f_{\tau}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

До того ж

$$\text{cov}_X(\tau) = \rho_X(\tau) - m_X^2.$$

Дисперсія стаціонарного процесу є постійною і дорівнює значенню корреляційної функції при нульовому значенню аргументу:

$$\begin{aligned} D_X &= E\{(X(t) - m_X)^2\} = \rho_X(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx = E\{X^2(t)\} - m_X^2. \end{aligned}$$

При розв'язанні деяких практичних задач багатовимірні щільності не розглядають, а працюють лише з математичними сподіваннями і кореляційною (коваріаційною) функцією. У зв'язку з цим вводять поняття стаціонарності у широкому сенсі.

#### Означення 2.6

Стаціонарний процес  $X(t)$  з скінченною дисперсією називається **стаціонарним в широкому сенсі**, якщо його математичне сподівання і кореляційна (коваріаційна) функція є інваріантними відносно зсуву за часом, тобто математичне сподівання є постійним (не залежить від часу), а кореляційна функція залежить від різниці аргументів  $\tau = t_2 - t_1$  і скінченна при  $\tau = 0$ :

$$\rho_X(t_1, t_2) = \rho_X(t_1 - t_2) = \rho_X(\tau).$$

Випадкові процеси, що є стаціонарними в узькому сенсі є стаціонарними в широкому. Обернене твердження є не завжди вірним, але для гаусівських процесів із стаціонарності в широкому сенсі впливає стаціонарність в вузькому сенсі.

Схема стаціонарних процесів описує багато реальних явищ. В фінансовій математиці важливу роль відіграє вивчення часових рядів. У загальному випадку випадкова складова часового ряду є стаціонарною випадковою послідовністю.

### 2.3. Випадкові процеси з незалежними приростами

Будемо говорити, що процес  $X(t)$  – процес з незалежними приростами, якщо для довільних  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \in T$ , які задовольняють умові  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_n$ , випадкові величини  $X(t_n) - X(t_{n-1}), \dots, X(t_3) - X(t_2), X(t_2) - X(t_1)$  є незалежними.

**Приклад.** Покладемо  $T = \mathbb{N}$ ,  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), \dots$  – послідовність випадкових величин, тоді випадковий процес  $X(t) = \sum_{n=1}^k X_n$  – процес з незалежними приростами.

## 2.4. Марковські випадкові процеси.

Марковський процес – це особливий тип стохастичного процесу, де лише поточне значення змінної є важливим для прогнозування майбутнього. Минуле та те, яким чином теперішній стан отримали з минулого, не має значення.

Зазвичай припускається, що ціни на акції описуються марковськими процесами. Припустимо, що ціна акції зараз становить 100 у.о. Якщо ціна акції підпорядковується марковському процесу, на наші прогнози на майбутнє ціна, що була у акції тиждень тому не вплине, так само як і місяць тому, або рік тому. Єдиною важливою інформацією є те, що ціна зараз становить 100 у.о. Прогнози на майбутнє є невизначеними і повинні бути виражені через розподіли ймовірностей. Властивість Маркова передбачає, що розподіл ймовірності ціни в будь-який конкретний майбутній час не залежить від траєкторії ціни в минулому.

Дамо більш строгі означення марковського процесу. Для цього будемо вважати, що множина  $T$  є лінійно впорядкованою і позначимо

$$\mathfrak{F}_{\leq t} = \sigma\{X(s), s \in T, s \leq t\}, \quad \mathfrak{F}_{\geq t} = \sigma\{X(s), s \in T, s \geq t\}, \quad \mathfrak{F}_{=t} = \sigma\{X(t)\}.$$

### **Означення 2.7**

Випадковий процес  $X(t)$  називається **марковським**, якщо для довільного  $t \in T$  та довільного  $B \in \mathfrak{F}_{\geq t}$  маємо

$$P(B / \mathfrak{F}_{\leq t}) = P(B / \mathfrak{F}_{=t}).$$

Будь-який процес з незалежними приростами є марковським.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8
2. Сеньо, П. С. Випадкові процеси [Текст] : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с. – ISBN 966-96414-7-0.
3. Ширяев А. Н. Теория случайных процессов, М.: Физматлит, 2005. — 408 с. — ISBN 5-9221-03350.