«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 3

Вінерівський процес. Основні властивості вінерівського процесу

3.1. Історичні відомості

У 1827 році ботанік Броун досліджував під мікроскопом цитоплазму, яку відібрав з пилку Clarcia Pulchella. І раптом він помітить, що дрібні частинки хаотично рухаються. Він приймає це за деякий прояв живих молекул і проводить досліди з вуглями, склом і мінералами та помічає той самий ефект.

Виявилося, що це пов'язано з тим, що найменші частинки при зіткненнях з молекулами, що хаотично рухаються постійно отримували удари в одному напрямку або в іншому напрямку.

При підвищенні температур зіткнення ставали частішими, при зниженні їх частоти знижувалися. Математична модель такого процесу було створено А. Ейнштейном на початку XX століття, а низку результатів для отриманого процесу було сформовано Норбертом Вінером у своїй дисертації 1918 року.

Нóрберт Вінер

(англ. *Norbert Wiener*; 26 листопада 1894, США — 18 березня 1964, Швеція)

На честь останнього науковця відповідний випадковий процес називають вінерівським, на честь першого дослідника - броунівским рухом.

3.2. Означення вінерівського процесу.

Означення 3.1	Гаусовий процес $w(t), t \geq 0$ називається ***процесом Вінера*** або ***вінеровим процесом***, якщо 1) $Ew(t) = 0, t \geq 0;$ 2) $\operatorname{cov}(w(s), w(t)) = \min\{s, t\};\ s, t \geq 0.$

Властивості.

1) Вінерівський процес має нормальний розподіл $w(t) \sim N(0,t)$, зокрема $w(0)=0$ майже напевно (м.н.).

2) Має незалежні прирости: для довільних $m \geq 1$ та $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ випадкові величини $w(t_0)$, $w(t_1)-w(t_0), \ldots, w(t_m)-w(t_{m-1})$ є незалежними у сукупності.

3) Однорідність приростів: випадкові величини $w(t)-w(\mathrm{s})$ та $w(v)-w(u)$ мають однакові розподіли для довільних $t,\ s,\ u, v \geq 0$ таких, що $t-s=u-v$. Зокрема, якщо $0 \leq s \leq t$, то $w(t)-w(s) \sim N(0,\ t-s)$.

4) Недиференційовність траєкторій:

$$P(\exists t \geq 0 \text{ така, що } w'(\mathrm{t}) \text{ існує }) = 0.$$

На рисунку 3.1 показано, що відбувається з траєкторіями вінерівського процесу при $\Delta t \to 0$.

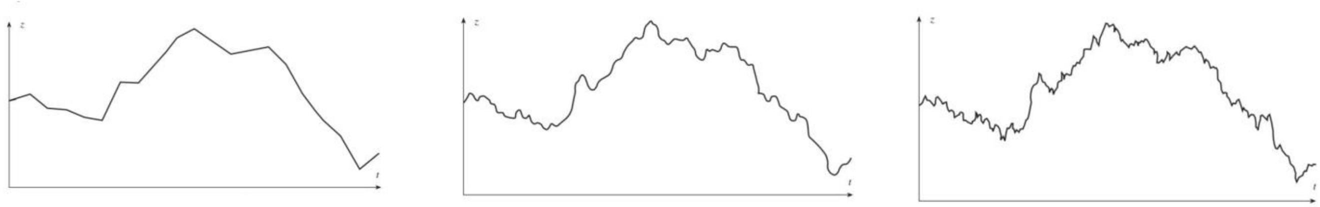

Рисунок 3.1

Приклад. Нехай $\{w(t), \mathrm{t} \geq 0\}$ є вінеровим процесом. Знайти:

а) $E[w(2)]$; б) $E[w(2)]^2$; в) $E[3+5w(2)]^2$.

Розв'язок.

а) За означенням вінерівського процесу маємо $E[w(2)] = 0$.

б) Оскільки $\operatorname{cov}(w(s), w(t)) = \min\{s, t\}, s, t \geq 0$, то

$$E[w(2)]^2 = E[w(2)w(2)] - E[w(2)]E[w(2)] = \operatorname{cov}(w(2), w(2)) = \min\{2,2\} = 2.$$

в) $E[3 + 5w(2)]^2 = 9 + 30E[w(2)] + 25E[w(2)]^2 = 9 + 50 = 59.$

3.3. Траєкторії вінерівського процесу.

Траєкторії вінерівського процесу ніде не диференційовні

Теорема 3.1	Для довільного $t_0 \in [0;\, 1]$ $\limsup\limits_{t \downarrow t_0} \left| \dfrac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty$ м.н. (3.1)

Наслідок 3.1. Похідна $w'(t_0)$ не існує для довільного $t_0 \in [0;\, 1]$.

Наслідок 3.1 очевидно випливає з теореми 3.1. Дійсно, якби похідна $w'(t_0)$ існувала в довільній точці $t_0 \in [0;\, 1]$, то це означало б, що границя

$$\lim_{t \to t_0} \frac{w(t, \omega) - w(t_0, \omega)}{t - t_0}$$

існує для усіх $\omega \in A$, де $A-$ випадкова подія додатної ймовірності. А це протирічить (3.1).

Доведення теореми 3.1. Розглянемо монотонно спадну послідовність $t_n, n \geq 1$, яка збігається до t_0. Покладемо

$$\xi_n = \sup_{t_0 < t \le t_n} \left| \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} \right|,$$

ξ_n є випадковою величиною для довільного $n \ge 1$.

Оскільки $\xi_{n+1} \le \xi_n$, то границя $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ існує. Тому

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n \ge x) = \lim_{n\to\infty} P(\xi_n \ge x) \text{ для довільного } x > 0.$$

Тоді

$$P(\lim_{n\to\infty} \xi_n \ge x) = \lim_{n\to\infty} P(\xi_n \ge x) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{t_0 \le t \le t_n} \left| \frac{w(\mathrm{t}) - \mathrm{w}(\mathrm{t}_0)}{t - t_0} \right| \ge x \right) \ge$$

$$\ge \limsup_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{w(t_n) - w(t_0)}{t_n - t_0} \right| \ge x \right) = \limsup_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\gamma}{t_n - t_0} \right| \ge x \right) = 1,$$

де γ – стандартна гаусівська випадкова величина. Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \infty \quad \text{м.н.}$$

Відповідно

$$\limsup_{t \downarrow t_0} \left| \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty \quad \text{м.н.}$$

Теорему 3.1 доведено.

3.4. Варіація вінерівського процесу.

Вінерівський процес має нескінченну варіацію

Нехай $\Psi = \; 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ – розбиття відрізка $[0,1]$. Для розбиття

Ψ визначимо квадратичну варіацію Q вінерівського процесу w:

$$Q(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega))^2.$$

Теорема 3.2	Нехай Ψ_m – послідовність розбиття, для якої $\Psi_m \to 0$, $m \to \infty$. Нехай Q_m – послідовність відповідних квадратичних варіацій. Тоді $$\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, Q_m = 1.$$

Доведення теореми 3.2. Оскільки $w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega) \in N(0,\ t_i - t_{i-1})$, то $EQ_m = 1$.

Нехай γ– стандартна гаусівська випадкова величина, тоді $E[\gamma]^4 = 3$ і тому в силу незалежності приростів вінерівського процесу

$$\mathrm{var}[Q_m] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[(\mathrm{w}(\mathrm{t}_i) - \mathrm{w}(\mathrm{t}_{i-1}))^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{E}[\mathrm{w}(\mathrm{t}_i) - \mathrm{w}(\mathrm{t}_{i-1})]^4 - (\mathrm{t}_i - \mathrm{t}_{i-1})^2] = 2\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{t}_i - \mathrm{t}_{i-1})^2 \le$$

$$\le 2\left|Q_m\right| \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{t}_i - \mathrm{t}_{i-1}) \to 0,$$

що і потрібно було довести.

На відміну від квадратичної варіації, звичайна варіація вінерівського процесу є необмеженою. Варіація V визначається наступним чином:

$$V\ \ \omega\ \ = \sup_{\Psi} \sum_{i=1}^{n} \left| w(\mathrm{t}_i, \omega) - w(\mathrm{t}_{i-1}, \omega) \right|,$$

де супремум береться по всім розбиттям $\Psi = \ \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ відрізка $\left[0,1\right]$.

Теорема 3.3	Існує випадкова подія Ω_1, така, що $P(\Omega_1) = 1$ та $V(\omega) = \infty$ для довільного $\omega \in \Omega_1$. Це означає, що варіація процесу на $\left[0,1\right]$.є необмеженою майже напевно.

Доведення теореми 3.3. Нехай $\Omega' = \ \ \omega : V(\omega) < \infty \ \ $. Відмітимо, що Ω' є випадковою величиною. Нехай $\Omega'' = \ \ \omega : w(\mathrm{t}, \omega) -$ неперервна функція по t на $\left[0,1\right]$. Ω'' є випадковою подією, до того ж $P(\Omega'') = 1$.

Тоді для $\omega \in \Omega'$ маємо

$$
\begin{aligned}
Q(\omega) &\le \max_{1 \le i \le n} \left| w(\mathrm{t}_i, \omega) - w(\mathrm{t}_{i-1}, \omega) \right| \sum_{i=1}^{n} \left| w(\mathrm{t}_i, \omega) - w(\mathrm{t}_{i-1}, \omega) \right| \le \\
&\le V \ \ \omega \ \max_{1 \le i \le n} \left| w(\mathrm{t}_i, \omega) - w(\mathrm{t}_{i-1}, \omega) \right|.
\end{aligned}
$$

Оскільки $w(\mathrm{t}, \omega)-$рівномірно неперервна функція для $\omega \in \Omega'$, то для довільного $\omega \in \Omega'$ та довільного $\varepsilon > 0$, знайдеться $\delta > 0$, для якого

$$
\left| w(\mathrm{t}_i, \omega) - w(\mathrm{t}_{i-1}, \omega) \right| < \varepsilon \text{ для } \left| w(\mathrm{t}, \omega) \right| < \delta.
$$

Виберемо послідовність розбиття Ψ_m, для якої $\left| \Psi_m \right| \to 0$. Тоді для $\omega \in \Omega' \bigcap \Omega''$ та достатньо великих m (таких, що $\left| \Psi_m \right| < \delta$) маємо

$$
Q_m(\omega) \le \varepsilon \, \mathrm{V}_m(\omega),
$$

де $Q_m(\omega)$, $V_m(\omega)$ – квадратична варіація та варіація для розбиття Ψ. Звідси випливає, що $Q_m(\omega) \to 0, m \to \infty$ для $\omega \in \Omega' \bigcap \Omega''$. Це можливо лише, коли $P(\Omega') = 0$ в силу теореми 2. Теорему 3 доведено.

<u>Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках</u>

1. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

2. Гихман И.И., Скороход *А.В. Введение в* теорию случайных процессов. *Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.*

3. Сеньо, П. С. Випадкові процеси [Текст] : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с. – ISBN 966-96414-7-0.