«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 4

Інтеграл Іто: прості функції та загальний випадок

4.1. σ-алгебра породжена вінерівським процесом

Нехай стандартний вінерівський процес $w(t), t \in [0; T] = \Delta$ задано на $\Omega, \Im, P$. Нехай $\Re - \sigma$-алгебра борелівських множин на дійсній осі. Виберемо $t \in \Delta$ і введемо σ-алгебру подій $\{\Im_t, t \geq 0\}$, яка породжується вінерівським процесом $\{w(s), s \leq t\}$.

Означення 4.1	Сукупність подій $\Im_t$, яка є найменшою σ-алгеброю, що містить усі події вигляду $\{\mathrm{w(s)} \in \Re\}$ для довільного $s \leq t$ та довільного $B \in \Re$ називаються σ***-алгеброю, що породжується*** $\{w(s), s \leq t\}$.

Зрозуміло, що $\Im_t \subseteq \Im$ для довільних $t \leq T$. Крім того, якщо $0 \leq s \leq t \leq T$, то $\Im_t \subseteq \Im_s$.

Означення 4.2	Сукупність σ-алгебр $\{\Im_t, t \geq 0\}$ називають ***потоком***, якщо для всіх $t_1 < t_2$ має місце включення $\Im_{t_1} \subset \Im_{t_2}$.

σ-алгебра $\Im_t$ має зрозумілий фізичний зміст: в $\Im_t$ містяться усі події, про реалізацію яких можна дізнатись під час спостереження за процесом $w(s)$ на проміжку $[0;\ t]$.

Означення 4.3	Випадкова функція $\{f(t), t \in \Delta\}$ називається ***неупередженною функцією*** відносно потоку σ-алгебр $\{\Im_t, t \geq 0\}$, якщо для довільного $t \in \Delta$ випадкова величина $f(t)$ є $\Im_t$ вимірною (тобто $\{f(t) \in B\} \in \Im_t$ довільного $B \in \Re$).

Далі завжди будемо припускати, що всі σ-алгебри поповнені підмножинами подій міри 0.

4.2. Стохастичний інтеграл для простих функцій.

Визначимо стохастичний інтеграл по вінерівському процесу на інтервалі $\Delta = [0;\, T]$ для випадкових функцій спеціального вигляду – простих функцій.

Нехай Δ розбито на проміжки Δ_k , $k = 1,\ldots,n$: $\Delta = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k$, де $\Delta_1 = [t_1;t_2]$, $\Delta_2 = \; t_2;t_3],\ldots,\Delta_n = \; t_n;t_{n+1}]$.

Означення 4.4	Випадкова функція $f(t)$ називається ***простою функцією***, якщо вона має вигляд: $$f(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{\Delta_k}(t),\; t \in \Delta,$$ де $I_{\Delta_k}(t)-$ індикатор проміжка Δ_k, тобто $$I_{\Delta_k}(t) = \begin{cases} 1,\; t \in \Delta_k, \\ 0,\; t \notin \Delta_k, \end{cases}$$ до того ж x_k - випадкові величини такі, що $E(x_k)^2 = D_k < \infty$.

З означення випливає, що $f(t)$ є неупередженною функцією, якщо величина x_k є вимірною відносно $\Im_{t_k}, k = 1,\ldots,n$. Дійсно, якщо $t \in \Delta_k$, то $f(t) = x_k$ є вимірною відносно $\Im_{t_k}$, але $t_k < t$ тому $\Im_{t_k} \subseteq \Im_t$, тобто $f(t)$ є $\Im_t$ вимірною.

Означення 4.5	Стохастичним інтегралом від простої неупередженної функції $f(t)$ по вінерівському процесу $\{w(t), t \in \Delta\}$ називається випадкова величина:

$$\mathrm{I(f)} = \int_{\Delta} f(t)\,\mathrm{d}\,w(\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta w_k, \qquad (4.1)$$

де $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$ − приріст процесу $w(t)$ на проміжку Δ_k.

Властивості інтеграла Іто.

1. Лінійність. Для довільних $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{I}(\alpha_1 \mathrm{f}_1 + \alpha_2 \mathrm{f}_2) = \alpha_1 \mathrm{I}(\mathrm{f}_1) + \alpha_2 \mathrm{I}(\mathrm{f}_2).$$

Дійсно, якщо $f_1(t)$, $f_2(t)$− прості випадкові функції, до того ж вимірні відносно $\Im_t$, то таку ж властивість має і лінійна комбінація $f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$, тобто $f(t)$− проста функція, тобто властивість 1 випливає з (4.1) та з лінійності операції суми.

2. $E(\mathrm{I(f)}) = 0.$

Перевіримо справедливість властивості 2.

$$E(\mathrm{I(f)}) = \sum_{k=1}^{n} E(x_k \Delta w_k).$$

Але в силу того, що Δw_k не залежить від $\Im_k$ за властивістю незалежності приростів вінерівського процесу $\mathrm{E}(w(\mathrm{t})) = 0$ та x_k вімірна відносно $\Im_k$ маємо

$$E(x_k \Delta w_k) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_k \Delta w_k \mid \Im_k)) = \mathrm{E}(x_k\, \mathrm{E}(\Delta w_k \mid \Im_k)) =$$

$$= \mathrm{E}(x_k)\,\mathrm{E}(\Delta w_k) = 0.$$

3. $E(\mathrm{I}(f))^2 = \int_{\Delta} E(|\, f(t)\,|^2) dt < \infty.$

Дійсно

$$E(x_k \Delta w_k)^2 = \mathrm{E}(x_k)^2 E(\Delta w_k)^2 = D_k(\mathrm{t}_{k+1} - t_k).$$

Якщо $k < l$, то $E(x_k \Delta w_k) = \mathrm{E}(x_k \Delta w_k f_l \Delta w_l) = \mathrm{E}(x_k \Delta w_k f_l)\mathrm{E}(\Delta w_l) = 0$, що також вірно і для $k > l$. Отже,

$$E(\mathrm{I}(f))^2 = \sum_{k=1}^{n} D_k(\mathrm{t}_{k+1} - t_k) = \sum_{k=1}^{n} E(x_k)^2(\mathrm{t}_{k+1} - t_k) = \int_{\Delta} E(|\ f(t)\ |)^2 dt.$$

Тобто властивість 3 виконується.

4.3. Побудова стохастичного інтегралу для неперервних функцій.

Для побудови стохастичного інтегралу від більш складних функцій введемо наступне твердження.

Теорема 4.1	Нехай функція $f(t)$ є неперервною у середньому квадратичному, тоді: 1. Якщо $f(t)-$ неупереджена функція, то знайдеться послідовність простих $\{f_n(t)\}$ така, що $\int_{\Delta} E(\|\ f(t) - f_n(\mathrm{t})\ \|^2)dt \to 0$ при $n \to \infty$. 2. Має місце збіжність у середньому квадратичному послідовності стохастичних інтегралів $I(\mathrm{f}_n)$: $I(f_n) \to I(f)$ с.к. при $n \to \infty$. (4.2)

Тепер можемо визначити стохастичний інтеграл від функції $f(t)$.

Означення 4.6	Випадкова величина $\mathrm{I(f)} = \int\limits_{\Delta} f(t)\,\mathrm{d}\,w(\mathrm{t}) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \Delta w_k$, яку визначено в (4.2) називають ***стохастичним інтегралом Іто*** від випадкової функції $f(t)$.

Сформулюємо теорему про існування стохастичного інтегралу.

Теорема 4.2	Якщо $\{f(t), \mathrm{t} \in \Delta\}$ – є функцією неперервною у середньому квадратичному, яку задано на скінченому проміжку $\Delta = \left[0; T\right]$ і вимірна відносно потоку σ-алгебр $\{\Im_t, t \geq 0\}$, де $\Im_t = \sigma\{w(s), s \in \left[0, t\right]\}$, то стохастичний інтеграл $\mathrm{I(f)} = \int\limits_{\Delta} f(t)\,\mathrm{d}\,w(\mathrm{t})$ існує та має властивості 1-3.

Приклад. Покажемо, що

$$\int\limits_0^T w(t)dw(t) = \frac{1}{2}(w^2(T) - T).$$

Розв'язок. Відмітимо, що Δw_k має розподіл $N(0;h)$, тому $E(\Delta w_k)^2 = h$, а $E(|\Delta w_k|)^4 = 3E^2(|\Delta w_k|^2) = 3h^2$, до того ж $h = \dfrac{T}{n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Розглянемо перетворення $k-$го члену в інтегральній сумі.

$$w(\mathrm{t}_k)\Delta w_k = \frac{1}{2}\ w^2(\mathrm{t}_{k+1}) - w^2(\mathrm{t}_k)\ - \frac{1}{2}(\Delta w_k)^2.$$

Звідси для $I_n(w)$ маємо

$$I_n(w) = \sum_{k=1}^{n} w(t_k)\Delta w_k = \frac{1}{2}\ w^2(T) - w^2(0)\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\ (\Delta w_k)^2.$$

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta w_k)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} E(\Delta w_k)^2 = nh = T.$$

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta w_k)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} D(\Delta w_k)^2 = n2h^2 = \frac{2T^2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким чином $\sum_{k=1}^{n} (\Delta w_k)^2 \to T$ в середньому квадратичному при $n \to \infty$, звідки в силу $w(0) = 0$ маємо

$$I_n(w) \to \frac{1}{2}\ w^2(T) - T \quad \text{в середньому квадратичному при } n \to \infty.$$

Що і потрібно було довести.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

2. Гихман И.И., Скороход *А.В. Введение в* теорию случайных процессов. *Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с*.

3. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.