Лекція 5

Формула Іто: загальний та частинні випадки

5.1. Стохастичне диференціальне рівняння

Ведене поняття стохастичного інтегралу Іто дозволяє розглянути новий клас диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною. Нехай $X(t) \in \mathbb{R}^n, a(t,x) \in \mathbb{R}^n, \sigma(t,x) \in \mathbb{R}^{n\times m} -$ матрична функція розмірності $n \times m$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ вінерівський процес, $\upsilon \in \mathbb{R}^n -$ вектор початкових умов.

Означення 5.1	Випадкова функція $X(t)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння $$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t)$$ на $\Delta = \left[0, T\right]$ з початковою умовою $X(0) = \upsilon$, якщо її можна представити у вигляді $$X(t) = \upsilon + \int_0^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, X(\tau))dw(\tau).$$

5.2. Формула Іто.

Теорема 5.1	Нехай функція $f = f(t,x)$ є неперервно диференційовною по t, двічі неперервно диференційовною по змінній x $(f = f(t,x) \in \mathrm{C}^{1,2}([0,\mathrm{T}] \times \mathbb{R}))$. Припустимо, що $$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t), t \in [0;T].$$ Тоді $$df(t, X(t)) = f_t'(t, X(t))dt + f_x'(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f_{xx}''(t, X(t))\sigma^2(t)dt$$

Формально формулу Іто можна записати, як формулу Тейлора, записану до другого члена

$$df(t, X(t)) = f_t'(t, X(t))dt + f_x'(t, X(t))dX(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}''(t, \mathrm{X}(t))(dt)^2 + 2 f_{xx}''(t, \mathrm{X}(t))dtdX(t) + f_{xx}''(t, \mathrm{X}(t))(dX(t))^2 \right),$$

де використовується наступне (формальне) правило множення стохастичних диференціалів:

$\times$	dt	$dw(t)$
dt	0	0
$dw(t)$	0	dt

Наприклад, нехай $dX(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw(t)$

$$(dX(t))^2 = (dX(t))(dX(t)) = (a(t)dt + \sigma(t)dw(t))(a(t)dt + \sigma(t)dw(t)) =$$

$$a^2(t)(dt)^2 + 2a(t)\sigma(t)dt\,dw(t) + \sigma^2(t)(dw(t))^2 = \sigma^2(t)dt.$$

Розглянемо узагальнення формули Іто. Нехай $w_1(t), \dots, w_n(t)$ −незалежні вінерові процеси, узгоджені з потоком σ -алгебр $\Im_t$.

Припустимо, що $\int_0^T a(t)dt < \infty, \int_0^T (\sigma_i(t))^2 dt < \infty, i = \overline{1,m}$ м.н., $a,\ \sigma_i$ прогресивно вимірні. Говорять, що $\Im_t$ - узгоджений процес $X(t)$ має стохастичний диференціал

$$dX(t) = a(t)dt + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(t)dw_i(t),$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)ds + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s)dw(s), t \in [0,T].$$

Теорема 5.1	Нехай $f = f(t, x_1, \dots, x_n) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, припустимо, що $dX_n(t) = a_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{i,j}(t)dw_j(t),\ t \in [0,T],$ де $w_j(t), t \geq 0,\ j = \overline{1,m}$ - незалежні вінерові процеси. Тоді $df(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) = f_t'(t, X_1(t), \dots, X_n(t))dt + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}'(\dots)dX_i(t) +$ $+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} f_{x_i,x_k}'(\dots)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}(t)\sigma_{k,j}(t)dt.$

Правило множення диференціалів:

$\times$	dt	$d_j w(t)$
dt	0	0
$dw_i(t)$	0	$I_{i=j}dt$

Приклад. Нехай $\{w(t), t \geq 0\}$ є вінеровим процесом. Легко бачити, що для випадкового процесу $X(t) = \sin t + 2w(t),\ t \geq 0$ стохастичний диференціал матиме вигляд:

$$dX(t) = \cos t dt + 2dw(t).$$

Приклад. Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та має неперервну другу похідну, тоді формула Іто запишеться наступним чином:

$$.\, df(w(t)) = f'(w(t))dw(t) + \frac{1}{2} f''(w(t))dt.$$

В якості прикладу застосування формули знайдемо стохастичний інтеграл для процесу $X(t) = e^{3w^2(t)}$.

Зауважимо, що для формули Іто будемо використовувати функцію $f(x) = e^{3x^2}$, для якої $f'(x) = 6xe^{3x^2}$ та $f''(x) = 6e^{3x^2}(1+6x^2)$.

Тоді

$$dX(t) = 6w(t)e^{3w^2(t)}dw(t) + \frac{1}{2}6e^{3w^2(t)}(1+6w^2(t))dt.$$

Отже,

$$dX(t) = 6w(t)X(t)dw(t) + 3X(t)(1+6w^2(t))dt.$$

Приклад. За допомогою формули Іто, перетворіть процес $X(t) = \int_0^t s dw(s)$ таким чином, щоб він не містив стохастичний диференціал.

Розв'язок. Виберемо $f(x)=tx$. У такому випадку формула Іто для вінерівського процесу $\{w(t), t\geq 0\}$ перепишеться наступним чином:

$$df(t,w(t)) = f_t'(t,w(t))dt + f_x'(t,w(t))dw(t) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t,w(t))dt.$$

Тоді

$$df(t,\mathrm{w}(t)) = w(t)dt + tdw(t) + 0,$$

тобто

$$d(tw(t)) = w(t)dt + tdw(t),$$

або

$$tw(t) = \int_0^t w(s)ds + \int_0^t sdw(s),$$

що можна переписати наступним чином:

$$\int_0^t sdw(s) = tw(t) - \int_0^t w(s)ds.$$

5.3. Процес, що описує зміну ціни акції.

Стохастичним процесом Іто називається узагальнений вінерівський процес

$$dX(t) = a(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dw(t)$$

Розглянемо ще одне представлення вінерівського процесу .Процес w називається вінерівським процесом, якщо має наступні дві властивості:

Властивість 1. Приріст Δw за невеликий проміжок часу Δt дорівнює:

$$\Delta w = \varepsilon\sqrt{\Delta t}\,,$$

де ε має стандартний гаусівський розподіл $N(0;1)$.

Властивість 2. Значення ΔX на будь -яких двох різних коротких інтервалів часу Δt,, є незалежними.

За невеликий проміжок часу від t до Δt змінна має приріст ΔX , де

$$\Delta X = a(x,t)\Delta t + \sigma(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Розглянемо стохастичний процес, що описує зміну ціни бездивідентної акції. На перший погляд, природньо припустити, що ціна акції описується узагальненим вінерівським процесом, тобто має постійну швидкість очікуваного зсуву та дисперсію. Але цей процес не враховує важливі особливості акції. Річ в тому, що очікувана інвестором дохідність не залежить від ціни. Якщо інвестор хоче отримати очікувану дохідність на рівні 14% річних, а ціна акції дорівнює 10 у.о., то він захоче отримати ці 14% і при ціні акції рівній 50 у.о.

Звичайно, гіпотеза про незмінну швидкість зсуву є нелогічною і має бути змінена на те, що постійною є очікувана дохідність. Якщо $S(t)-$ ціна акції у момент t, то очікувана швидкість зсуву має бути рівною μS , $\mu \in R$. Це означає, що через короткий проміжок часу Δt очікуване значення до якого піднімається ціна акції є рівною $\mu S\Delta t$.

Якщо волатильність ціни акції завжди дорівнює нулю, то

$$\Delta S = \mu S(t)\Delta t.$$

При переході до границі $\Delta t \to 0$, одержуємо, що

$$dS(t) = \mu S(t)dt.$$

Тобто на відрізку $[0;T]$ маємо

$$S(\mathrm{T}) = S_0 e^{\mu T}.$$

З формули випливає, що якщо дисперсія дорівнює нулю, то ціна акції за одиницю часу збільшується на величину відсоткової ставки.

Зрозуміло, що на практиці для ціни акції властиві коливання. Логічно припустити, що мінливість відсоткового доходу за короткий період часу Δt залишається постійною незалежно від ціни акції. Тобто інвестор не може точно спрогнозувати дохідність якою б не була ціна акції. Це означає, що стандартне відхилення зміни ціни акції за короткий період часу має бути пропорційний самій ціні. Це призводить до моделі

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t).$$

Приклад 3. Проаналізуємо бездивідендну акцію. Припустимо, що її волатильність дорівнює 30% річних, а дохідність 15% річних при неперервному нарахуванні. Процес, що описує ціну акції має наступний вигляд:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = 0{,}15dt + 0{,}3dw(t).$$

Якщо $S-$ ціна акції в конкретний момент часу, а ΔS – збільшення ціни акції протягом короткого інтервалу часу, то

$$\frac{\Delta S}{S} = 0{,}15\Delta t + 0{,}3\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Розглянемо інтервал часу рівний одному тижню, тобто 0,0192 року, припустимо, що початкова ціна акції дорівнює 100 у.о., тоді

$$\Delta S = 100(0{,}15\Delta t + 0{,}3\varepsilon\sqrt{\Delta t}).$$

$$\Delta S = 0{,}288 + 4{,}16\varepsilon.$$

Звідси випливає, що ціна акції зросте на випадкову величину, що має нормальний розподіл математичним сподіванням 0,288, і стандартним відхиленням 4,16 у.о

<u>*Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках*</u>

1. *Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8*

2. *Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.*

3. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.