«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ

ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 6

Стохастичні диференціальні рівняння. Приклади та методи їх розв'язання.

6.1. Найпростіші стохастичні диференціальні рівняння

Нехай $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ − імовірнісний простір з потоком σ-алгебр $\Im_t$. Найпростішим стохастичним диференціальним рівнянням називають рівняння виду

$$dX(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw(t), \;\; X(0) = x_0. \tag{6.1}$$

Зрозуміло, що процес

$$X(t) = x_0 + \int\limits_0^t a(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \sigma(\tau)dw(\tau), \ \ t \geq 0,$$

є розв'язком рівняння (6.1).

Приклад. Розв'язком початкової задачі

$$dX(t) = arctg(t)dt + t^3 dw(t), \ \ X(0) = 1$$

є процес

$$X(t) = 1 + \int\limits_0^t arctg(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \tau^2 dw(\tau) =$$

$$= 1 + \frac{t}{1+t^2} - \ln(1+\mathrm{t}^2) + \mathrm{t}^3\, w(\mathrm{t}) - 3\int\limits_0^t \tau^2 w(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau.$$

6.2. Рівняння, що наводяться до найпростіших за допомогою заміни змінних.

При побудові розв'язків конкретних рівнянь і систем намагаються насамперед звести їх до більш простих типів рівнянням. Найчастіше при цьому використовують заміну змінних, тобто двічі неперервно диференційовну функцію $y = v(t,x)$ таку, що має обернену функцію виду $x = u(t,y)$. Відповідно до формули Іто, рівняння

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t),$$

за допомогою заміни $y = v(t,x)$ зводиться до рівняння

$$dY(t) = F(t, \mathrm{Y}(t))dt + G(t, Y(t))dw(t),$$

де

$$F(t,y) = (v'_t + v'_x f + \frac{1}{2}(\sigma^2 v''_{xx}))\,|_{x=u(t,y)},$$

$$\mathrm{G}(t,y) = v'_x g\,|_{x=u(t,y)}\,.$$

Рівняння приводимо за допомогою заміни змінних до найпростішого тоді і тільки тоді, коли виконано тотожність

$$\left(g\left(\frac{g'_t}{g^2} - \left(\frac{f}{g}\right)'_x\right) + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right)'_x \equiv 0. \tag{6.2}$$

Для лінійних однорідних рівнянь

$$dX(t) = f_1(t)X(t)dt + \sigma_1(t)\,X(t)dw(t), \quad X(0) = x_0 \tag{6.3}$$

тотожність (6.2) виконується, отже, воно зводиться до найпростішого. Відповідне найпростіше рівняння має вигляд

$$dY(t) = \left(f_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\mathrm{s})\right)dt + \sigma_1(t)dw(t),$$

заміна $\mathrm{x} = e^y$. Тому процес

$$\mathrm{X}(t) = x_0 \exp\left\{\left(f_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(\mathrm{s})\right)dt + \sigma_1(t)dw(t)\right\}$$

є розв’язком рівняння (6.3)

Стохастичні диференціальні рівняння є ефективною моделлю випадкового процесу та основою для дослідження у багатьох розділах страхової та фінансової математики, економіки, теорії управління, тощо. На теперішній час наближені аналітичні і асимптотичні методи дослідження математичних моделей стали невід’ємною частиною теорії математичного моделювання, що дозволяє вивчати наближені розв‘язки достатньо складних збурених задач, якщо відомі розв’язки детермінованих задач.

Зокрема, стохастичні диференціальні рівняння дуже часто мають економічну інтерпретацію, що дійсно робить дослідження його розв’язків особливо цікавим для економістів. Найпростішим прикладом може бути модель О. Васічека, що описує еволюцію відсоткової ставки

$$dr(t) = \alpha\left(\beta - r(t)\right)dt + \sigma dw(t),$$

де w - вінерівський процес, β - середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, α - параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, а σ - параметр волатильності.

Серед інших популярних моделей такого типу слід виділити модель Р. Рендельмана - Б. Барттера, що також відповідає узагальненому геометричному броунівському руху

$$dr(t) = \theta(t)r(t)dt + \sigma(t)r(t)dw(t),$$

а також модель Д. Халла- А. Уайта:

$$dr(t) = \left(\theta(t) + \alpha(t)r(t)\right)dt + \sigma(t)dw(t),$$

Зауважимо, що у реальному житті моделі, в яких параметри α, θ, σ є константами, майже не зустрічаються, оскільки з плином часу та із зміною умов на ринку змінюються і волатильність, і середній рівень довгострокової ставки, і швидкість повернення до середнього значення.

6.3. Задачі фінансової математики.

Задача про оптимальну зупинку. Припустимо, що фізична особа має певні активи (нерухомість, акції, нафта,…), які вона планує продати. Ціна $S(t)$ активів на ринку у момент часу t змінюється відповідно до стохастичного диференціального рівняння

$$dS(t) = rS(t)dt + \alpha S(t)dw(t).$$

Відсоткова ставка є відомою. У який момент часу потрібно продавати акції?

Припускається, що продавець знає поведінку ціни до теперішнього моменту часу t, але через випадкові зовнішні фактори (шум в системі), він не може бути впевненим в моменті продажу, чи виявиться його вибір часу найкращим. Отже, потрібно знайти стратегію зупинки, яка дає найкращий результат в майбутньому, тобто максимізує очікувану вигоду продавця з урахуванням інфляції.

Задача про оптимальний вибір портфелю (оптимальне розміщення цінних паперів. Припускаємо, що є дві наступні можливості для інвестицій

- Ризикові активи (наприклад акції), коли ціна за одиницю часу t задовольняє стохастичному диференціальному рівнянню
$$dS(t) = rS(t)dt + \alpha S(t)dw(t).$$
- Безризикове інвестування (наприклад бони), коли ціна за одиницю часу росте за експонентою:
$$dV(t) = bV(t)dt.$$

У кожний момент часу t робимо вибір, яку частину u_t заощаджень $X(t)$ помістити до ризикових інвестицій, а яку частину $(1-u_t)X(t)$ помістити до безризикових, тобто $\max\limits_{0\le u_t \le 1} E\left[U(\mathrm{X}(\mathrm{T}))\right]$, T - кінцевий час.

Модель Блека- Шоулза. Нехай $B(\mathrm{t})$ − банківський рахунок

$$dB(t) = rB(t)dt,\ B(t_0) = 1,$$

ціна акції задовольняє наступне рівняння:

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma S(t)dw(t),\ S(t_0) = a > 0$$

Модель Блека-Шоулза використовується для оцінки різних цінних паперів і власного капіталу бізнес-структур, що залучають позикові кошти з метою фінансування своєї діяльності.

Формула має на увазі наявність ключового елемента визначення опціонної вартості. Їм є приблизна волатильність (показник мінливості ціни) акцій.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.

3. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.