«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ

ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 7

Теорема існування та єдиності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

7.1. Стохастичні диференціальні рівняння

7.2. Розв'язок стохастичного диференціального рівняння.

7.3. Існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

7.1. Стохастичні диференціальні рівняння

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(t, \mathrm{X(t)})dt + \sigma(t, X(\mathrm{t}))dw(t), \;\; X(0) = x_0, \tag{7.1}$$

де $w(t)$ − вінерівський процес; $a(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ − невипадкові функції. Сенс рівняння можна пояснити наступним чином: зміна значення функції

$$dX(t) = X(t + dt) - X(t)$$

залежить не лише від зміни часової змінної, а і від варіації вінерівського процесу $w(t+dt)$ з коефіцієнтом пропорційності σ.

Оскільки траєкторії вінерівського процесу недиференційовні, то диференціал $dw(t)$ є невизначеним, але

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, X(\tau))dw(\tau),\ \ 0 \le t \le T.$$

До цього вигляду ми приходимо шляхом інтегрування лівої та правої частин (7.1), до того ж вважаємо, що виконується наступне співвідношення для випадкових функцій

$$\int_0^t dX(\tau) = \mathrm{X(t)} - \mathrm{X(0)}.$$

Перший інтеграл правої частини (7.1) – це інтеграл Рімана для випадкової підінтегральної функції. Другий інтеграл правої частини (7.1) − це стохастичний інтеграл Іто.

7.2 Розв’язок стохастичного диференціального рівняння.

Нехай $\Im_t$ − потік $\sigma-$алгебр, $a(t,x)$, $\sigma(t,x)-$ вимірні функції, $w(t), t \ge 0$ є $\Im_t$-вінерівським процесом, $X(0)-$ $\Im_0-$вимірна випадкова величина.

Означення 7.1	Випадковий процес $X = (X(t), t \in [0,T])$ є розв’язком стохастичного диференціального рівняння $$dX(t) = a(t, \mathrm{X(t)})dt + \sigma(t, X(\mathrm{t}))dw(t),\ t \in \left[0, T\right],$$

	з початковою умовою $X(0)=x_0$, якщо він задовольняє наступні умови: 1) для довільного $t \in [0,T]$ процес $X(t)$ неперервний та $\Im_t$ - узгоджений; 2) $\int_0^T \lvert a(\tau, X(\tau))\rvert d\tau < \infty$, $\int_0^T \lvert \sigma(\tau, X(\tau))\rvert^2 d\tau < \infty$ м.н.; 3) майже напевно має місце рівність для $0 \le t \le T$ $$X(t) = x_0 + \int_0^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, X(\tau))dw(\tau) .$$

Введемо поняття сильного розв'язку випадкового процесу.

Означення 7.2	Випадковий процес $X(t)$ називається ***сильним розв'язком рівняння*** (7.1), якщо 1) $X=(X(t), t\in[0,T])$ є узгодженими з вінерівським процесом; 2) інтеграли Рімана та Іто коректно визначені; 3) X є функцією, що залежить від a та σ та w - вінерівського процесу.

Приклад 7.1. Розглянемо модель росту відсоткової ставки для ризикових активів

$$dX(t) = a\,\mathrm{X}(\mathrm{t})dt + \sigma X(\mathrm{t})dw(t),$$

або

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = adt + \sigma dw(t),$$

та

$$\int_0^t \frac{dX(\mathrm{s})}{X(\mathrm{s})} = adt + \sigma w(t), \quad (\mathrm{w}(0) = 0).$$

Для того, щоб обчислити інтеграл з лівої частини використовуємо формулу Іто для функції $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Тоді

$$d(\ln X(t)) = \frac{1}{X(t)} \cdot dX(\mathrm{t}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X^2(\mathrm{t})}\right)\langle dX(t) \cdot dX(t)\rangle,$$

$$d(\ln X(t)) = \frac{dX(t)}{X(t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt.$$

А отже

$$\ln\frac{X(t)}{X(0)} = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t).$$

Тобто розв'язок стохастичного диференціального рівняння, за допомогою якого моделюється зміни відсоткової ставки для ризикових активів, має вигляд

$$X(t) = X(0)e^{\left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t)}.$$

7.3. Існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Припустимо, що для вимірних функцій $a(t,x)$, $\sigma(t,x)$ виконуються умови:

1) умова Ліпшиця:

існує така константа L, що для всіх $t \in \left[0,T\right]$ та для всіх $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ мають місце наступні оцінки

$$\left|a(t,x_1) - a(t,x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|;$$

$$\left|\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|;$$

2) умова лінійного росту по x:

існує така константа C, що для всіх $t \in \left[0,T\right]$ та для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\left|a(t,x)\right| \le L\ 1 + |\ x\ |\ ;$$

$$\left|\sigma(t,x)\right| \le L\ 1 + |\ x\ |\ .$$

Припустимо, що $EX_0^{\ 2} < \infty.$ Тоді задача Коші

$$dX(t) = a(t, \mathrm{X}(\mathrm{t}))dt + \sigma(t, X(\mathrm{t}))dw(t),\ t \in \left[0,T\right],$$

з початковою умовою $X(0) = x_0,$ має розв'язок, такий що $E \sup\limits_{t\in[0;T]} X^2(\mathrm{t}) < \infty$.

Якщо $\mathrm{Y}(\mathrm{t}),\ \mathrm{t} \in \left[0,T\right]$- інший розв'язок (7.1), такий що $\int\limits_0^T EY^2(\tau)d\tau < \infty$, то

$$P\ \ X(t) = Y(t), t \in [0,T]\ \ = 1.$$

Зауваження. Умови 1) та 2) є природніми. Цей факт можна зрозуміти з наступних двох простих прикладів детермінованих диференціальних рівнянь (тобто таких рівнянь, де $\sigma = 0$).

Рівняння $dX(t) = \mathrm{X}^2(\mathrm{t})dt,\ X(0) = 1,$ що відповідає функції $a(t,x) = x^2$ має єдиний розв'язок:

$$X(\mathrm{t}) = \frac{1}{1-t},\ 0 \le \mathrm{t} < 1.$$

Але в цьому випадку неможливо знайти глобальний розв'язок, визначений для всіх t.

Умова лінійного росту гарантує, що розв'язок рівняння (7.1) не досягає нескінченності за скінчений час.

Рівняння $dX(t) = 3\sqrt[3]{\mathrm{X}^2(\mathrm{t})}dt,\ X(0) = 0,$ має більше ніж один розв'язок. Дійсно, для довільного $C > 0$ функція

$$X(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0, & t \le C, \\ (\mathrm{t}-\mathrm{C})^3, & t > C, \end{cases}$$

задовольняє рівняння $dX(t) = 3\sqrt[3]{\mathrm{X}^2(\mathrm{t})}dt,\ X(0) = 0,$ у цьому випадку $a(t,x) = 3\sqrt[3]{x^2}$ не задовольняє рівнянню Ліпшиця при $x = 0$.

Таким чином, умова Ліпшиця гарантує, що рівняння (7.1) має єдиний розв'язок.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння з лінійними коефіцієнтами.

$$dX(t) = (\mathrm{c}_1\mathrm{X}(\mathrm{t}) + \mathrm{c}_2)dt + (\sigma_1 X(\mathrm{t}) + \sigma_2)dw(t),\ t \in [0,T], \qquad (7.2)$$

або

$$dX(t) = x_0 + \int_0^t (\mathrm{c}_1\mathrm{X}(\tau) + \mathrm{c}_2)d\tau + \int_0^t (\sigma_1 X(\tau) + \sigma_2)dw(\tau),\ t \in [0,T],$$

де x_0, c_i, σ_i, $i = 1,2$, деякі невипадкові сталі. Зрозуміло, що умови Ліпшиця та лінійного росту виконуються для функцій

$$a(t,x) = c_1 x + c_2, \quad \sigma(t,x) = \sigma_1 x + \sigma_2,$$

тому рівняння (7.2) має єдиний сильний розв’язок.

Приклад 7.2. Покажемо, що стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = tX(t)dt + 2(X(t)+3)dw(t),\ t \in \left[0,T\right], X(0) = x_0$$

має розв'язок.

Розв'язок. Перевіримо лінійність та умови Ліпшиця.

Зрозуміло, що коефіцієнти рівняння: $a(t,x) = tx$, $\sigma(t,x) = 2(x+3)$, при деякому заданому L задовольняють наступні нерівності:

$$a(t,x) \le L\ \ 1+|\,x\,|\ \ ,$$

$$\sigma(t,x) \le L\ \ 1+|\,x\,|\ \ .$$

Перевіримо умови Ліпшиця.

$$\left|a(t,x_1) - a(t,x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|;$$

$$\left|\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|.$$

Дійсно, для всіх $t \in \left[0,T\right]$

$$\left|a(t,x_1) - a(t,x_2)\right| = \left|tx_1 - tx_2\right| = |\,\mathrm{t}\,| \cdot \left|x_1 - x_2\right| \le T\left|x_1 - x_2\right|,$$

$$\left|\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)\right| = \left|2(x_1+3) - 2(x_2+3)\right| = |\,2x_1 - 2x_2\,| \le 2\left|x_1 - x_2\right|.$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. *Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8*

2. *Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.*

3. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.