«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ

ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 8

Підхід Башельє до моделювання цін на акції

8.1. Значення моделі Башельє для світу фінансів

Сучасний аналіз фінансових активів, пов'язаний із використанням стохастичних методів, переживає період інтенсивного розвитку. Методи загальної теорії випадкових процесів найкраще підходять для адекватного опису еволюції вартості основних (акцій та облігацій) та похідних (форвардів, ф'ючерсів, опціонів та ін.) цінних паперів. Першою роботою у цьому напрямі була дисертація Л. Башельє, який вперше використав концепцію вінерівського процесу (броунівського руху) в моделі динаміки курсу акцій, а також вивів формулу інвестиційної ціни опціону.

Л. Башельє було зауважено, що ціна фінансового активу зазнає випадкових змін подібно до броунівського руху. Значно пізніше, коли відбувся бурхливий розвиток фінансових ринків, погляди Л. Башельє було переглянуто і розвинуто. Так, для моделювання ціни акції більш обґрунтованою виявилася модель геометричного броунівського руху.

Луи Жан-Батист Альфонс Башелье
11 березня 1870 — 28 квітня 1946

Л. Башельє в своїй дисертації 1900 р. написав:

«…нескінченно малі прирости цін на акції пропорційні приростам процесу <броунівського руху>….»

Л. Башельє не використовував сам термін *процесу <броунівського руху>*, оскільки він не існував у ті часи. Тим не менше, Башельє описав сам процес тими самими властивостями, що використовуються для визначення вінерівського (броунівського) процесу.

8.2. Модель Башельє. Сучасна форма

Сучасний запис формулювання Башельє має наступний вигляд:

$$dX(t) = \sigma X(\mathrm{t}) dw(t), \;\; \sigma > 0.$$

Природнім розв'язком цього рівняння є $X(t) = x + \sigma w(t), \;\; \sigma > 0,$ якщо початкова ціна акції дорівнює $x,$ тобто $X(0) = x.$ Оскільки $w(t) \sim N(0,1),$ то $P\{X(t) < 0\}$ не є нульовою, що протирічить невід'ємності ціноутворення. Цей факт довгий час був підґрунтям для ігнорування ідей Башельє.

Пізніше було помічено, що інвестори на фінансових ринках, розмірковуючи про ефективності фінансових вкладень капіталу, мають на увазі відносні прирости, тобто оперують в термінах

$$\frac{dX(t)}{X(t)}.$$

Якщо у формулюванні Башельє замінити прирости на відносні прирости, то одержимо рівняння:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \sigma\, dw(t), \;\; X(0) = x. \tag{8.1}$$

Якщо б у правій частині використовувались прирости dt замість $dw(t),$ тоді саме рівняння перетворюється на наступне:

$$dX(t) = \sigma X(t) dt, \;\; X(0) = x. \tag{8.2}$$

Розв'язок такої задачі Коші має вигляд:

$$X(t) = X(0) e^{\sigma t}.$$

Помітимо, що заміна диференціалів $dw(t) \mapsto dt$ (або самих функцій $w(t) \mapsto t$) приводить до моделі, яку можна описати так:

«... відносний дохід є пропорційним часу тривалості інвестиції...»

Така модель здається більш зрозумілою ніж модель Башельє. Але досвід свідчить, що саме модель Башельє призведе до більш чіткого зображення ситуації на фінансових ринках.

Розв'язок моделі Башельє (8.1) має вигляд:

$$X(t) = e^{\sigma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}. \tag{8.3}$$

Таким чином, хоч рівняння (8.2) отримуємо з рівняння (8.1) шляхом заміни $w(t) \mapsto t$, але розв'язок (8.2) неможливо одержати з розв'язку (8.1), оскільки розв'язку (8.1) містить додатковий множник $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}$.

Означення 8.1	Випадковий процес $X(t)$ ***називається експоненціальним броунівським рухом***, якщо $$X(t) = e^{\sigma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Розуміння самого сенсу рівняння (8.1) і розуміння того, яким самим є його розв'язок прийшло після низки робіт японського математика К. Іто у 40-х роках XX століття. При цьому диференціальне рівняння (8.1) було замінене на еквівалентне йому інтегральне

$$X(t) - x = \sigma \int_0^t X(s) dw(s),$$

де інтеграл з правої частини розуміється як стохастичний інтеграл.

Відома і більш загальна інтерпритація моделіє Башельє, згідно якої, ціна акції змінюється за законом $\mathrm{X}(t) = \sigma w(t) + \mu t,\ \sigma \neq 0,\ \mu \in R -$ сталі, $w(t)$ — вінерівський процес. У цій моделі з'являється вплив часової змінної на ціноутворення активу. Для всіх $T > 0,\ \sigma \neq 0,\ \mu \in R$ можлива додатня ймовірність того, що ціна акції $X(T)$ може бути від'ємною.

Зрозуміло, що ціна акції $X(T)$ є гауссівською випадковою величиною. Знайдемо її характеристики.

Середнє значення:

$$E[\mathrm{X}(t)] = E[\sigma w(t) + \mu t] = \sigma \cdot 0 + \mu t.$$

Дисперсія:

$$\mathrm{var}[\mathrm{X(t)}] = E[\mathrm{X}(t)]^2 = E[\sigma w(t) + \mu t]^2 = E[\sigma^2 w^2(t)] + E[2\mu t w(\mathrm{t})] + \mathrm{E}[\mu^2 t^2] =$$

$$= \sigma^2 E[w^2(t)] + 2\mu t E[w(t)] + \mu^2 t^2 = \sigma^2 t + \mu^2 t^2.$$

Тоді

$$\mathrm{P}\{X(t) < 0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + \mu^2 t^2)}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2(\sigma^2 t + \mu^2 t^2)}} > 0\,.$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. *Klesov O. I. Stochastic Differential Equations// Klesov O. I. – (Electronic edition), 2017. – 165 p.*

2.Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.

4. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.