

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 9

**Стохастичні диференціальні рівняння в
фінансовій математиці.**

9.1. Акції. Неперервний час.

9.2. Стохастичні відсоткові ставки.

9.3. Популярні моделі відсоткових ставок.

9.1. Акції. Неперервний час.

Будь-яка величина, значення якої з плином часу змінюється випадковим чином, називається стохастичним процесом. Стохастичні процеси з неперервним часом та неперервною змінною моделюють ціни на акції. Ця модель є актуальною, якщо вважати, що моменти можливих змін ціни на акцію неперервним чином заповнюють певний часовий проміжок.

Позначимо через $S(t)$ ціну акції у момент часу t , тоді зміну ціни за час Δt буде $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$. При малих Δt розглянемо прирости логарифмів цін:

$$r(t) \stackrel{def}{=} \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \ln \left(1 + \frac{\Delta S(t)}{S(t)} \right) \approx \frac{\Delta S(t)}{S(t)}.$$

Ціна акції $r(t)$ є абсолютно випадковим явищем, на яке впливають багато різноманітних обставин. Тому в силу центральної граничної теореми $r(t)$ має бути гаусівською випадковою величиною.

Якщо вважати, що прирости незалежні; $E[r(t)] = 0$; дисперсія пропорційна Δt , то в силу неперервності $S(t)$ та початкової умови $R_0 = 0$, процес $\ln S(t)$ є *вінерівським процесом*, тобто

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \sigma \Delta w(t) \quad \text{або} \quad dS(t) \approx \sigma S(t) dw(t).$$

Більш реалістичною є ситуація, коли $R(t)$ має деякий невідповідний *тренд*. Наприклад, інфляція з деяким коефіцієнтом росту вносить зміни до вартості акції. У випадку лінійного тренду (типу інфляції) маємо

$$R(t) = r\Delta t + \sigma \Delta w(t),$$

тобто

$$\frac{S'(t)}{S(t)} \approx r\Delta t + \sigma \Delta w(t), \quad \text{або} \quad dS(t) = S(t)(r dt + \sigma dw(t)).$$

Це рівняння описує ціну акції: константа μ називається *коефіцієнтом повернення капіталу*, а σ називається *коефіцієнтом впливу випадкових явищ на процес ціноутворення*.

Приклад 1. Проаналізуємо бездивідендну акцію. Припустимо, що її волатильність дорівнює 30% річних, а дохідність 15% річних при неперервному нарахуванні. Процес, що описує ціну акції має наступний вигляд:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = 0,15dt + 0,3dw(t).$$

Якщо $S(t)$ – ціна акції в конкретний момент часу, а ΔS – збільшення ціни акції протягом короткого інтервалу часу, то

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = 0,15\Delta t + 0,3\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

де $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Розглянемо інтервал часу рівний одному тижню, тобто 0,0192 року, припустимо, що початкова ціна акції дорівнює 100 у.о., тоді

$$\Delta S(t) = 100(0,15\Delta t + 0,3\varepsilon\sqrt{\Delta t}).$$

$$\Delta S(t) = 0,288 + 4,16\varepsilon.$$

Звідси випливає, що ціна акції зросте на випадкову величину, що має нормальний розподіл математичним сподіванням 0,288, і стандартним відхиленням 4,16 у.о

Марківський процес – це особливий тип стохастичного процесу, де лише поточне значення змінної є важливим для прогнозування майбутнього. Минуле та те, яким чином теперішній стан отримали з минулого, не має значення.

Зазвичай припускається, що ціни на акції описуються марківськими процесами. Припустимо, що ціна акції зараз становить 100 у.о. Якщо ціна акції підпорядковується марківському процесу, на наші прогнози на майбутнє ціна, що була у акції тиждень тому не вплине, так само як і місяць тому, або рік тому. Єдиною важливою інформацією є те, що ціна зараз становить 100 у.о. Прогнози на майбутнє є невизначеними і повинні бути виражені через розподіли ймовірностей. Властивість Маркова передбачає, що розподіл ймовірності ціни в будь-який конкретний майбутній час не залежить від траєкторії ціни в минулому.

9.2. Стохастичні відсоткові ставки.

Розглянемо стохастичний процес, що описує зміну ціни бездивідентної акції. На перший погляд, природньо припустити, що ціна акції описується узагальненим вінерівським процесом, тобто має постійну швидкість очікуваного зсуву та дисперсію. Але цей процес не враховує важливі особливості акції. Річ в тому, що очікувана інвестором дохідність не залежить від ціни. Якщо інвестор хоче отримати очікувану дохідність на рівні 14% річних, а ціна акції дорівнює 10 у.о., то він захоче отримати ці 14% і при ціні акції рівній 50 у.о.

Звичайно, гіпотеза про незмінну швидкість зсуву є нелогічною і має бути змінена на те, що постійною є очікувана дохідність. Якщо $S(t)$ – ціна акції у момент t , то очікувана швидкість зсуву має бути рівною $rS(t)$, $r \in R$. Це означає, що через короткий проміжок часу Δt очікуване значення до якого піднімається ціна акції є рівною $rS(t)\Delta t$.

Якщо волатильність ціни акції завжди дорівнює нулю, то

$$\Delta S = rS(t)\Delta t.$$

При переході до границі $\Delta t \rightarrow 0$, одержуємо, що

$$dS(t) = rS(t)dt.$$

Тобто на відрізку $[0; T]$ маємо

$$S(T) = S_0 e^{rT}. \quad (9.1).$$

З формули (9.1) випливає, що якщо дисперсія дорівнює нулю, то ціна акції за одиницю часу збільшується на величину відсоткової ставки.

Розглянемо ймовірнісний простір Ω, \mathfrak{F}, P , що описує стохастичну складову фінансового ринку, а також присутню на ньому інформацію $\mathfrak{F}_n, n \in N$. Будемо

розглядати лише моделі, в яких відсоткові ставки є випадковими процесами, що мають неперервні траєкторії, які є узагальненням (аналогом) моделі (9.1).

$$\text{Зрозуміло, що } r(t) = \frac{d \ln S(t)}{dt} \text{ і } S(t) = S(0)e^{\int_0^t r(s) ds}.$$

Стохастичне диференціальне рівняння вигляду

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dw(t) \quad (9.2)$$

узагальнює більшість моделей відсоткових ставок.

9.3. Популярні моделі відсоткових ставок.

Наведемо деякі популярні моделі відсоткових ставок $r(t)$, що відносяться до випадкових моделей типу (9.2).

Модель Мертона (1974 р.) є широко використовуваною моделлю. Аналітики та інвестори використовують модель Мертона, щоб зрозуміти, наскільки компанія здатна виконувати фінансові зобов'язання, обслуговувати свій борг і зважити загальну ймовірність того, що вона матиме кредитний дефолт.

Згідно з цією моделлю, вартість акцій власний капітал моделюється як опціон колл на вартість усієї компанії - тобто включаючи зобов'язання «виконано за номінальною вартістю зобов'язань». Таким чином, ринкова ціна акцій залежить від волатильності ринкової вартості активів компанії.

$$dr(t) = \alpha dt + \gamma dw(t).$$

Модель Дотхана (1978 р.) У даній моделі α та γ пропорційні значенню відсоткової ставки, тобто використовується геометричний броунівський рух, а значить виключаються негативні відсоткові ставки:

$$dr(t) = \alpha r(t)dt + \gamma r(t)dw(t)$$

Моделі Кокса, Інгерсолла і Росса. У даній моделі волатильність пропорційна квадратному кореню зі ставки:

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t))dt + \gamma(r(t))^{\frac{1}{2}}dw(t).$$

Модель Хо-Лі (1986 р.)

$$dr(t) = \alpha(t)dt + \gamma dw(t)$$

Це модель короткострокової ставки, що широко використовується при ціноутворенні опціонів на облігації, своп опціонів інших похідних відсоткових ставок, а також при моделюванні майбутніх відсоткових ставок.

Модель Блека і Каразинського (1991 р.)

$$dr(t) = r(t)(\alpha(t) - \beta(t) \ln r(t))dt + \gamma(t)r(t)dw(t).$$

Модель Чена (1995 р.)- математична модель, що описує еволюцію відсоткової ставки і належить до класу «трьохфакторних моделей» (дифузійних моделей), оскільки визначає рух відсоткової ставки, на яку впливають три складові ринкових ризиків.

$$dr(t) = (\alpha(t) - r(t))dt + (\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{2}}dw_r(t).$$

$$dr(t) = (\alpha - \alpha(t))dt + (\alpha(t))^{\frac{1}{2}}dw_\alpha(t).$$

$$dr(t) = (\sigma - \sigma(t))dt + (\sigma(t))^{\frac{1}{2}}dw_\sigma(t).$$

Процеси w_r, w_α, w_σ є незалежними вінерівськими процесами.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. Голіченко, І. І. Фінансова математика та елементи актуарної / І. І. Голіченко, О. І. Клесов, О. А. Тимошенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 104 с
2. Klesov O. I. *Stochastic Differential Equations*// Klesov O. I. – (Electronic edition), 2017. – 165p.
3. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5-06-005820-8
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.
5. Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения* / М.: Мир. 2003. 406 с.