Лекція 10

Модель Блека-Шоулза.

10.1. Означення моделі Блека-Шоулза.

Загальний інтерес до моделі Блека-Шоулза викликаний тим, що свого часу її автори зробили революцію у сфері оцінки справедливої вартості опціонів та інших похідних фінансових інструментів. Надалі вони отримали Нобелівську премію за свої відкриття, а виведена ними аналітична формула стала, мабуть, найфундаментальнішою і найвідомішою у світі фінансів.

Нехай час t змінюється неперервно на $[0,\infty)$, фінансовий ринок складається з двох активів: безризикового $B(t)$, $t \geq 0$ (банківський рахунок, облігація зі сталою відсотковою ставкою), який змінюється за формулою

$$dB(t) = rB(t)dt \text{ або } B(t) = B(0)e^{rt}, r > 0,$$

та ризикового $S(t)$, $t \geq 0$ (акція). Найчастіше розглядають модель

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t),$$

або

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t)}. \tag{10.1}$$

У сукупності цю модель називають – моделлю (B,S) $(B - bond, S - stock)$, або моделлю Блека-Шоулса. Рівняння (10.1) обрали за базову модель зміни ціни ризикового активу, оскільки модель з’являється як гранична для відомої моделі дискретного типу – біноміальної моделі. Інший аргумент є таким, що відносні прирости в цій моделі стаціонарні, а також процес $\ln S(t)$ має стаціонарні прирости. Ще один аргумент – безарбітражність ринку, тобто одержати прибуток без жодного ризику неможливо.

Іноді зручно використовувати інтегральну форму:

$$B(t) = B(0) + r\int_0^t B(\tau)d\tau, \ t \geq 0.$$

$$S(t) = S(0) + \mu\int_0^t S(\tau)d\tau + \sigma\int_0^t S(\tau)dw(\tau), \ t \geq 0.$$

Зауваження. Для того, щоб зрозуміти зв’язок з біноміальною моделлю, відмітимо, що з (10.1) випливає, що

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma w(t),$$

тобто $\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ має представлення, як вінерівський процес з дрейфом.

Біноміальна модель

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)=\sum_{i=1}^{t}\xi_i,$$

має представлення через випадкові блукання, що як відомо з відповідним маштабуванням і значеннями параметрів можна апроксимувати вінерівським процесом з дрейфом.

Знайдемо математичне сподівання від співвідношення

$$S(t)=S(0)+\mu\int_0^t S(\tau)d\tau+\sigma\int_0^t S(\tau)dw(\tau),\ t\geq 0.$$

$$E[S(t)]=E[S(0)]+E[\mu\int_0^t S(\tau)d\tau]+E[\sigma\int_0^t S(\tau)dw(\tau)],\ t\geq 0.$$

Тобто

$$E[S(t)]=S(0)+\mu\int_0^t E[S(\tau)]d\tau,\ t\geq 0.$$

Звідки

$$E[S(t)]=e^{\mu t}E[S(0)],\ t\geq 0.$$

10.2. Задача про визначення ціни вторинних активів.

Розглянемо задачу про визначення ціни вторинних активів (деривативів, опціонів). Для прикладу розглянемо опціон типу Call. Цей цінний актив дає право власнику придбати акцію по фіксованій *K* до закінчення терміну *T*. Зрозуміло, що тримач опціону по закінченню терміну одержує наступний дохід P:

$$P = \begin{cases} 0, & S(T) < K; \\ S(T) - K, & S(T) \geq K. \end{cases}$$

Середній дохід від операції буде дорівнювати: $E\max(0, S(T) - K)$. Враховуючи відсоткову ставку, вартість Call опціону буде дорівнювати:

$$C = e^{-rT} E\max(0, S(T) - K).$$

або

$$C = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x}) e^{-\frac{x^2}{2T}} dx, \; f = \max(0, x - K).$$

Точні обчислення призводять до формули Блека-Шоулза

$$C = S(0)\Phi(\mathrm{d}_1) - \mathrm{K} e^{-rT} \Phi(\mathrm{d}_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

а Φ - функція розподілу гаусівської випадкової величини.

10.3. Стратегія інвестора.

Нехай $(\Omega, \Im, \mathrm{P})$ − імовірнісний простір з потоком σ-алгебр $\Im_t$.

Означення 10.1	Пару узгоджених процесів $(\alpha, \beta) = \{\alpha(t), \beta(t), t \geq 0\}$, що описують кількість одиниць ризикового та безризикового активу, які має інвестор в момент часу t називають ***стратегією***.

Тобто стратегія – це двовимірний стохастичний процес $\phi = \{\phi_t = (\alpha(\mathrm{t}), \beta(\mathrm{t})),\ t \in [0, T]\}$, який задовольняє наступним умовам:

1) $\phi : [0, T] \times \Omega \to R^2$ є $(\mathrm{B}_T \times \Im_T)-$ вимірними, де $\phi(t,\omega) = \phi_t(\omega)$ для кожного $t \in [0,T]$ та $\omega \in \Omega$;

2) $\phi_t \in \Im_t$ для всіх $t \in [0, T]$;

3) $\int_0^T \alpha^2(t)dt < \infty$ та $\int_0^T |\beta(t)|\, dt < \infty$ м.н.

Умови 1)-3) забезпечують майже напевно скінченність наступних інтегралів

$$\int_0^t \alpha(\tau)dS(\tau) = \mu\int_0^t \alpha(\tau)S(\tau)d\tau + \sigma\int_0^t \alpha(\tau)S(\tau)dw(\tau),$$

$$\int_0^t \beta(\tau)dB(\tau) = r\int_0^t \beta(\tau)B(\tau)d\tau\,,$$

тобто визначено неперервний випадковий процес. Очевидно, що капітал інвестора в момент часу t дорівнює

$$V(t,\phi) = \alpha(t)S(t) + \beta(t)B(t)\,.$$

Означення 10.2	Стратегією $$(\alpha,\beta) = \{\alpha(t),\ \beta(t), t \geq 0\}$$ називають ***самофінансованою***, якщо $$V(t,\phi) = V(0,\phi) + \int_0^t \alpha(\tau)dS(\tau) + \int_0^t \beta(\tau)dB(\tau),$$ або, в диференціальній формі $$dV(t,\phi) = \alpha(t)dS(t) + \beta(t)dB(t)\,.$$

Зміст властивості самофінансованості полягає в тому, що зміна величини капіталу відбувається лише за рахунок зміни ціни ризикового та безризикового активу, без надходжень капіталу ззовні і його відтоку назовні.

Нехай $\phi = \{\phi_t = (\alpha(\mathrm{t}), \beta(\mathrm{t})), t \in [0, T]\}$ - стратегія. Процес, що описує дисконтовану ціну акції та процес, що описує дисконтований безризиковий актив пов'язані зі стратегією ϕ задаються наступними співвідношеннями

$$\mathrm{S}^*(t) = \frac{S(\mathrm{t})}{B(\mathrm{t})} = e^{-rt} S(\mathrm{t}),\ t \ge 0.$$

$$V^*(t, \phi) = \frac{V(t, \phi)}{B(t)} = e^{-rt} V(t, \phi),\ t \ge 0.$$

Пара (S, B^{-1}) є двовимірним процесом Іто, де $B^{-1}(t) = e^{-rt}$ є функцією обмеженої варіації на $[0, T]$, яка задовольняє рівняння: $dB^{-1}(t) = -rB^{-1}(t)dt,\ t \in [0, T]$.

Застосовуючи формулу Іто для цього процесу, поклавши $f(x, y) = xy$ для $x, y \in R$, одержимо

$$S^*(t) = S_0^* - r\int_0^t S^*(\tau)d\tau + \int_0^t e^{-r\tau} dS(\tau) =$$

$$S_0^* + (\mu - r)\int_0^t S^*(\tau)d\tau + \sigma\int_0^t S^*(\tau)dw(\tau).$$

Теорема 10.1	Стратегія ϕ є ***самофінансованою*** тоді і тільки тоді, коли $V^*(t, \phi)$ є неперервним процесом таким, що для кожного $t \in [0, T]$ $$V(t, \phi) = V(0, \phi) + \int_0^t \alpha(\tau) dS^*(\tau).$$ Де $\int_0^t \alpha(\tau)dS^*(\tau) = S_0^* + (\mu - r)\int_0^t S^*(\tau)d\tau + \sigma\int_0^t \alpha(\tau)S^*(\tau)dw(\tau).$

10.4. Арбітраж для моделі Блека- Шоулза.

Введемо означення арбітражної стратегії

Означення 10.3	Самофінансована стратегія називається ***арбітражною***, якщо $V(0,\phi)=0, V(T,\phi)\ge 0$ та $P(V(T,\phi)>0)>0.$

Еквівалентне твердження одержуємо, якщо змінити останню умову на

$$\mathrm{E}(V(T,\phi))>0.$$

Приклад. Розглянемо модель Блека-Шоулза з наступними параметрами $r=0,$ $\mu=0,$ $\sigma=1.$ Тоді

$$B(t)=1 \quad \text{та} \quad dS(t)=S(t)dw(t),\ t\ge 0.$$

Задамо стохастичний інтеграл

$$I(t)=\int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-\tau}}dw(\tau) \text{ для всіх } 0\le t<T,$$

для якого

$$E[I(t)]^2=\int_0^t \frac{1}{T-\tau}d\tau=\ln\left(\frac{T}{T-t}\right), \mathrm{t}<\mathrm{T}.$$

Відмітимо, що $E[I(0)]^2=0,$ $E[I(\mathrm{t})]$ зростає з t та $E[I(\mathrm{t})]\to\infty$ при $t\to\infty$.

Для кожного $a>0$ та моменту

$$\tau_a\equiv\min\{\inf\{\mathrm{t}\in[0;\mathrm{T}]:\mathrm{I(t)}=\mathrm{a}\},\mathrm{T}\},$$

маємо $0<\tau_a<T,$ майже напевно. Визначимо стратегію

$$\phi=\{\phi_t=\left(\alpha(\mathrm{t}),\beta(\mathrm{t})\right), t\in\left[0,T\right]\}$$

таким чином, що

$$\alpha(\mathrm{t})=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{T-t}}S^{-1}(\mathrm{t})\,\mathrm{I}_{\{\mathrm{t}\le\tau_a\}},\tau_a\ge T,\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \tau_a<T.\end{cases}$$

$$\beta(\mathrm{t})=\begin{cases}I(\min\{t,\,\tau_a\})-\alpha(t)S(t),\tau_a\ge T,\\ \quad 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \tau_a<T.\end{cases}$$

Тоді

$$V(t,\phi)=I(\min\{t,\tau_a\})=\int_0^{\min\{t,\tau_a\}}\frac{1}{\sqrt{T-s}}dw(s)=$$

$$\int_0^t \alpha\left(s\right)S(\mathrm{s})dw(s)=\int_0^t \alpha\left(s\right)dS(\mathrm{s}).$$

Оскільки $r=0,$ то виконуються умови теореми 10.1, а отже ϕ є самофінансованою стратегією. Відмітимо, що $V(0,\phi)=0, V(T,\phi)=I(\tau_a)=a>0$, що означає, що ϕ є арбітражною стратегією.

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. R. J. Wwilliams Introduction to the Mathematics of Finance//USA, 2006, 162 p.

2. Klesov O. I. Stochastic Differential Equations// Klesov O. I. – (Electronic edition), 2017. – 165 p.

3. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.

5. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.