«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ

ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 11

Геометричний броунівський рух та процес Орнштейна -Улєнбека.

11.1. Стохастичне диференціальне рівняння з лінійними коефіцієнтами.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$X(t) = x_0 + \int_0^t (c_1 X(\tau) + c_2) d\tau + \int_0^t (\sigma_1 X(\tau) + \sigma_2) dw(\tau), \ t \in [0, T], \tag{11.1}$$

де $x_0, c_i, \sigma_i, i = 1,2,$ деякі невипадкові сталі. Це рівняння є узагальненням процесу геометричного броунівського руху та процесу Орнштейна-Улєнбека.

Якщо покласти в (11.1) $c_1 = \sigma_1 = 0$, то одержимо *модель Мертона*, в результаті інтегрування якої одержимо явний вигляд розв'язку моделі Мертона

$$X(t) = x_0 + c_2 t + \sigma_2 w(t).$$

11.2. Геометричний броунівський рух

Розглянемо наступне стохастичне диференціальне рівняння, що відповілає випадку $c_2 = \sigma_2 = 0$ в рівнянні (11.1)

$$X(t) = x_0 + c_1 \int_0^t X(\tau) d\tau + \sigma_1 \int_0^t X(\tau) dw(\tau), \; t \in [0, T], \tag{11.2}$$

або в диференціальній формі

$$dX(t) = c_1 X(\mathrm{t}) dt + \sigma_1 X(\mathrm{t}) dw(\mathrm{t}), \; t \in [0, T].$$

У стохастичному інтегралі (другий інтеграл в правій частині (11.2)) процес X і вінерівський процес пов'язані мультиплікативно, тому рівняння (11.2) також має назву *стохастичне диференціальне рівняння з мультиплікативним шумом.*

Зауважимо, що рівняння (11.2) можна одержати з моделі Мертона, шляхом застосування формули Іто до процесу $Y(t) = e^{X(t)}$, де $X(t) = x_0 + c_2 t + \sigma_2 w(t)$. У такому випадку

$$\mathrm{d} Y(t) = (c_2 Y(t) + \frac{\sigma_2^2}{2} Y(t)) dt + \sigma_2 Y(t) dw(t), \; t \in [0, T].$$

Тоді при $\mu = c_2 + \dfrac{\sigma_2^2}{2}$ геометричний броунівський рух визначається рівнянням

$$dX(t) = \mu Y(t) dt + \sigma_2 Y(t) dw(t), \; t \in [0, T].$$

Цей аналіз зв’язку між двома моделями дозволяє, зробити припущення щодо вигляду розв’язку рівняння (11.2)

$$\mathrm{X}(t) = X(0)e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 w(t)}, \; t \in [0, T] \tag{11.3}$$

Доведення того, що (11.3) є розв’язком рівняння (11.2) спирається на застосування формули Іто.

Нагадаємо, що якщо $f = f(t,x)$ є неперервно диференційовною по t, двічі неперервно диференційовною по змінній x , тоді

$$df(t,w(t)) = f_t^{'}(t,w(t))dt + f_x^{'}(t,w(t))dw(t) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,w(t))dt .$$

Застосуємо формулу Іто для $f(t,x) = X(0)e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 x}$. Відмітимо, що

$$f_t'\;(t,x) = X(0)\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 x},$$

$$f_x'\;(t,x) = X(0)\sigma_1 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 x},$$

$$f_{xx}''\;(t,x) = X(0)\sigma_1^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 x}.$$

Тоді

$$dX(t) = X(0)\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 w(\mathrm{t})}dt + X(0)\sigma_1 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 w(\mathrm{t})}dw(t) +$$

$$+\frac{1}{2}X(0)\sigma_1^2 e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 x}dt,$$

звідки

$$dX(t) = c_1 X(0)e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 w(\mathrm{t})}dt + \sigma_1 X(0)e^{\left(c_1 - \frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right)t + \sigma_1 w(\mathrm{t})}dw(t),$$

Таким чином одержали, $dX(t) = c_1 X(\mathrm{t})dt + \sigma_1 X(\mathrm{t})dw(t)$, що і треба було показати.

11.3. Процес Орнштейна-Улєнбека. Властивості розв’язку.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$X(t) = x_0 + c \int_0^t X(\tau)d\tau + \sigma \int_0^t dw(\tau), \ t \in [0,T], \tag{11.4}$$

яке відповідає випадку $c_2 = \sigma_1 = 0$. Іноді це рівняння називають *рівнянням Ланжевіна*. П. Ланжевін вивчав стохастичні рівняння такого типу для опису швидкості руху броунівських частинок. На відміну від геометричного броунівського руху, в рівнянні вінерівський процес та процес X не пов’язані напряму в рівнянні (11.4). Часто, особливо в літературі фізичного спрямування говорять, що в (11.4) присутній *адитивний шум.*

Зауваження. Аналогом рівняння (11.4) для дискретного часу є рівняння авторегресії. Дійсно, перепишемо рівняння (11.4) в диференціальній формі.

$$X(t) = cX(\mathrm{t})dt + \sigma dw(\mathrm{t}), \ t \in [0,T].$$

Формально вважаємо, що $dt = 1$. Тоді

$$X(t+1) - X(t) = cX(t) + \sigma(w(t+1) - w(t))$$

або

$$X(t+1) = \phi X(t) + Z(t), \ t \in Z, \tag{11.5}$$

$\phi = c + 1 -$ константа (кофіцієнт авторегресії), а $Z(t) = \sigma(w(t+1) - w(t)), \ t \in Z,$ утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з розподілом $N(0, \sigma^2)$.

Рівність (11.5) називається *рівнянням авторегресії першого порядку*. Рівність (11.5) називають також авторегресійною моделлю першого порядку та використовують при аналізі часових рядів. Крім того, рівняння (11.5) є аналогом рівняння Ланжевіна.

Розв'яжемо рівняння (11.4). Для цього розглянемо перетворення процесу X:

$$Y(t) = e^{-ct} X(t).$$

Відмітимо, що $Y(0) = X(0)$. Застосуємо формулу Іто для функції $f(t,x) = e^{-ct}x$.

Тоді

$$f_t'\ (t,x) = -ce^{-ct}x,$$

$$f_x'\ (t,x) = e^{-ct},$$

$$f_{xx}''\ (t,x) = 0.$$

Стохастичний диференціал матиме вигляд

$$d(e^{-ct}X(t)) = -ce^{-ct}X(t)dt + e^{-ct}cX(\mathrm{t})dt + e^{-ct}\sigma dw(\mathrm{t}),$$

$$d(e^{-ct}X(t)) = e^{-ct}\sigma dw(\mathrm{t}).$$

Тому процес

$$X(t) = e^{ct}X(0) + e^{ct}\sigma\int_0^t e^{-c\tau}dw(\tau),$$

є розв'язком стохастичного диференціального рівняння (11.4).

Означення 11.1	Випадковий процес $X(t) = e^{ct}X(0) + e^{ct}\sigma\int_0^t e^{-c\tau}dw(\tau)$ називається ***процесом Орнштейна-Уленбека*** (Ornstein–Uhlenbeck Process), якщо $X(0)$ є невипадковою величиною.

Процес Орнштейна – Уленбека має широке застосування в фінансовій математиці та фізичних науках. Його початкове застосування у фізиці було в якості моделі швидкості масивної броунівський частинки під дією тертя. Процес Орнштейна - Улєнбека є стаціонарним гаусівским, марковським, однорідним в часі. Фактично, це єдиний нетривіальний процес, який задовольняє цим трьом умовам.

Визначимо параметри процесу. Математичне сподівання:

$$E[X(t)] = E[x_0] + c\int_0^t E[X(\tau)]d\tau + \sigma E[\int_0^t dw(\tau)],\ \ t\in[0,T],$$

$$E[X(t)] = E[x_0] + c\int_0^t E[X(\tau)]d\tau,$$

Отже, $E[X(t)] = e^{ct}$.

Визначимо коваріацію процесу Орнштейна – Улєнбека:

$$\operatorname{cov}(X(t),X(s)) = E[X(t)-EX(t)][X(s)-EX(s)] =$$

$$= E[X(t)][X(s)] - E[X(t)]\mathrm{E}[X(s)].$$

$$E[X(t)][X(\mathrm{s})] = \mathrm{E}[e^{ct}X(0) + e^{ct}\sigma\int_0^t e^{-c\tau}dw(\tau)][e^{cs}X(0) + e^{cs}\sigma\int_0^s e^{-c\tau}dw(\tau))] =$$

$$= \mathrm{E}[e^{c(s+t)}X^2(0)] + e^{c(t+s)}\sigma^2 E[\int_0^t e^{-c\tau}dw(\tau)][\int_0^s e^{-c\tau}dw(\tau))] =$$

$$= e^{c(s+t)}X^2(0) + e^{c(t+s)}\sigma^2[\int_0^{\min\{\mathrm{s},t\}} e^{-2c\tau}d\tau] =$$

$$= e^{c(s+t)}X^2(0) - \frac{e^{c(t+s)}}{2c}\sigma^2[e^{-2c\min\{\mathrm{s},t\}} - 1].$$

Отже,

$$\operatorname{cov}(X(t),X(s)) = e^{c(s+t)}(X^2(0)-1) - \frac{e^{c(t+s)}}{2c}\sigma^2[e^{-2c\min\{\mathrm{s},t\}} - 1].$$

Зокрема дисперсія буде рівною:

$$D(\mathrm{X(t)}) = e^{2ct}(X^2(0)-1) - \frac{\sigma^2}{2c}[1-e^{2ct}].$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. R. J. Williams Introduction to the Mathematics of Finance//USA, 2006, 162 p.

2. Klesov O. I. Stochastic Differential Equations// Klesov O. I. – (Electronic edition), 2017. – 165 p.

3. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. − М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.

5. *Б. Оксендаль*, *Стохастические дифференциальные уравнения* /. М.: Мир. 2003. 406 с.