

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 12

Арбітражні біноміальні моделі

12.1. Визначення біномної моделі з одним періодом

12.2 Домінантна та арбітражна стратегії.

12.3. Модель зміни цін на акцію з неперервним часом

12.1. Визначення біномної моделі з одним періодом

Розглянемо докладніше окремий випадок моделі фінансового ринку, який називають біноміальною моделлю. Перевагою біномної моделі є те, що умови існування арбітражної та домінантної стратегії, а також значення цін опціонів, можна записати як простий залежності між кількома її параметрами.

Біноміальна модель передбачає, що зміни цін акцій відбувається лише у моменти $\Delta t, 2\Delta t, \dots$, тобто через рівні проміжки часу Δt . Часовий інтервал $((k-1)\Delta t, k\Delta t]$ називається k -им періодом біномної моделі, $k \geq 1$.

Для математичного аналізу біномної моделі конкретне значення k , як правило, немає істотного значення. Важливим є лише розуміння, що зміни цін на акції відбуваються в моменти часу $k\Delta t$. Втім, конкретні значення стають важливими у підрозділі 12.3, де ми переходимо до межі при $k \rightarrow \infty$ і показуємо, що "границею" біноміальної моделі є інша важлива модель з неперервним часом, яка припускає зміни цін акцій у довільні моменти часу. Тим не менш, аж до підрозділу 12.3, ми вважатимемо, що $\Delta t = 1$ і це істотно спростить запис багатьох формул.

Біноміальна модель з одним періодом відповідає нагоді однієї акції та двох станів ринку, тобто ми робимо припущення $N=1, k=2, \dots$

Оскільки існують лише два сценарії зміни цін на фінансовому ринку, тобто $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, то ціна акції в момент часу може мати одне з двох значень

$$S(1, \omega) = \begin{cases} S^u, & \omega = \omega_1, \\ S^d, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

В економічній теорії сценарії і часто інтерпретуються як зростання (бум) та спад (рецесія) економічної активності відповідно. Відповідно до такої інтерпретації сценаріїв слід вважати, що $S^d < S(0) < S^u$, але ми розглядаємо більш загальний випадок $S^d < S^u$.

З використанням коефіцієнта ефективності інвестиції на першому періоді

$$R_1 = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}, \text{ тобто } R_1 = \begin{cases} \frac{S^u}{S(0)} - 1, & \omega = \omega_1, \\ \frac{S^d}{S(0)} - 1, & \omega = \omega_2, \end{cases}$$

ціну у кінці першого періоду можна записати у вигляді $S(1) = (1 + R(t))S(0)$.

Для біноміальних моделей процес накопичення безризикового капіталу $B(t)$ часто інтерпритується не як зміна банківського рахунку, а як процес зміни ціни облігації:

$$B_1(t) = (1 + r)B_0.$$

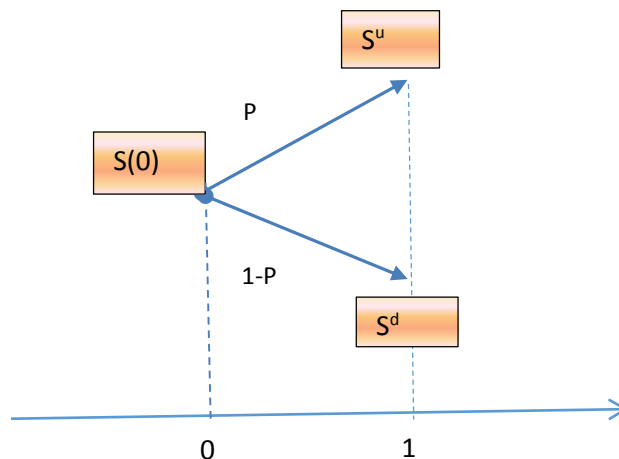
Число B_0 зараз інтепритується як ціна облігації в момент часу $t = 0$ і тому не обов'язково одно 1.

Ми також вважаємо, що існує нескінченний фінансовий ресурс, який дозволяє інвесторам отримувати кредити. Зручно вважати, що цей ресурс є банківським рахунком, у якого відсоткова ставка збігається із відсотковою ставкою облігації. Якщо ці дві ставки різні, то один із двох фінансових інструментів, облігація чи банківський рахунок, що використовуватиметься інвесторами не буде.

Якщо позначити $P(\omega_1) = p$ та $P(\omega_2) = 1 - p$, то ціновий процес можна записати у такому вигляді:

$$S(1) = \begin{cases} S^u, & P(\omega_1) = p, \\ S^d, & P(\omega_2) = 1 - p. \end{cases}$$

Геометрично процес можна зобразити у вигляді графа



12.2 Домінантна та арбітражна стратегії.

Наведемо означення домінантної та арбітражної стратегій

Означення 12.1

Стратегія \hat{H} називається **домінантною**, якщо існують два портфелі, які мають однакову ціну в момент $t = 0$, але різні розміри в момент $t = 1$.

Означення 12.2

Арбітражна стратегія – можливість на фінансовому ринку при нульовому портфелі безризиково отримати ненульовий дохід. При чому додатній дохід отримується із додатною ймовірністю.

Нижче в твердженнях наведені умови існування та відсутності домінантною і арбітражної стратегій для біноміальної моделі

Твердження 12.1. Якщо $S^d < (1+r)S(0) < S^u$, то немає арбітражної стратегії.

І у цьому випадку немає і домінантної стратегії.

Твердження 12.2. Якщо виконано одну з двох умов

$$S^d = (1+r)S(0), \quad (1+r)S(0) < S^u;$$

$$S^d < (1+r)S(0), \quad (1+r)S(0) = S^u;$$

то існує арбітражна стратегія, але домінантна стратегія не існує.

Твердження 12.3. Якщо виконано одну з двох умов

$$S^d > (1+r)S(0)^u, \quad (1+r)S(0) > S^u;$$

то є домінантна стратегія. Тим більше, існує і арбітражна стратегія.

12.3. Модель зміни цін на акцію з неперервним часом

Нашим завданням є побудова моделі зміни цін на акцію з неперервним часом, що є аналогом біноміальної моделі. Ми зможемо вирішити це завдання шляхом збільшення до нескінченності кількості періодів біноміальної моделі.

Залежність параметрів біноміальної моделі від Δt . Нехай $t > 0$ – дійсне число, а $m \geq 1$ – натуральне. Ми вважаємо, що операції на фінансовому ринку здійснюються на тимчасовому інтервалі $(0, t]$, а зміни цін на акцію відбувається у моменти часу

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t, \quad t_i - t_{i-1} = \frac{t}{m} = \Delta t.$$

Таким чином, ми розглядаємо біноміальну модель з m періодами, $(t_{i-1}; t_i]$, $1 \leq i \leq m$. Нехай R_i – це ефективність інвестиції протягом i -го періоду,

$$R_i = \frac{S(i\Delta t) - S((i-1)\Delta t)}{S((i-1)\Delta t)}, i = 1, \dots, m.$$

Розглянемо випадкові величини, $E_i = 1 + R_i$, $1 \leq i \leq m$. Ці величини незалежні в

сукупності та мають розподіл: $E_i = \begin{cases} 1 + u, & P(\omega_1) = p, \\ 1 + d, & P(\omega_2) = 1 - p. \end{cases}$

Ціну акції наприкінці останнього періоду можна записати у вигляді

$$S(t) = S(0)E_1 \dots E_m = S(0)e^{\sum \ln E_i} = S(0)e^H,$$

де

$$H(t) = \sum_{i=1}^m \ln E_i = \ln \left(\frac{S(t)}{S(0)} \right)$$

- це логарифм щодо зміни ціни акції. Визначимо дві константи

$$\mu = \frac{1}{\Delta t} E[\ln E_i] = \frac{1}{\Delta t} (p \ln(1 + u) + q(1 + d)),$$

і

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Delta t} D[\ln E_i] = \frac{1}{\Delta t} pq(\ln(1 + u) + q(1 + d))^2.$$

Константа μ називається *коефіцієнтом зносу*, а константа σ^2 - *коефіцієнтом волатильності*. Позначимо також через

$$X_i = \frac{\ln E_i - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}}$$

стандартизовані випадкові величини. Ці випадкові величини незалежні в сукупності.

Тому $E[X_i] = 0$, $D[X_i] = 1$. Крім того,

$$\ln E_i = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot \frac{\ln E_i - \mu \Delta t}{\sigma \sqrt{\Delta t}} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} X_i,$$

Тому

$$H(t) = \sum_{i=1}^m \ln E_i = \sum_{i=1}^m (\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} X_i) = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m X_i.$$

Таким чином ціна акції має вигляд

$$S(0)e^{H(t)} = S(0)e^{\mu t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m X_i},$$

Граничний перехід при $\Delta t \rightarrow 0$. За зміни $m \geq 1$ – (кількості періодів біноміальної моделі) змінюється і Δt . Більше того $m \rightarrow \infty$, тоді і лише тоді, коли $\Delta t \rightarrow 0$. Перед переходом до границі необхідно точно визначити залежність від Δt усіх величин, що утворюють модель.

Початкова ціна на акцію. Початкова ціна на акцію не залежить від кількості періодів моделі, тобто не залежить від Δt .

Ймовірність. Ймовірність p зміни ціни на акцію в $1+i$ раз протягом одного періоду може залишатися незмінною зі збільшенням кількості періодів, але може змінюватися. Позначимо цю ймовірність через p_m (нижній індекс- це кількість періодів) і робимо припущення, що

$$p_m \rightarrow p, m \rightarrow \infty.$$

А отже,

$$\mu_m \rightarrow \mu, \sigma_m \rightarrow \sigma, m \rightarrow \infty.$$

Випадкові величини. Значення випадкових величин X_i , а також ймовірності, з якими вони набувають ці значення, задаються рівністю

$$X_i = \begin{cases} \frac{q}{\sqrt{pq}}, P = p, \\ -\frac{q}{\sqrt{pq}}, P = q. \end{cases}$$

Оскільки і значення, і ймовірності залежать від m , то самі випадкові величини залежать від m . Таким чином, для кожного m є своя послідовність випадкових величин $X_{m;i}$ $1 \leq i \leq m$, з нульовим середнім та одиничною дисперсією.

Ціновий процес. Як видно із вигляду ціни акції $S(0)e^{H(t)} = S(0)e^{\mu t + \sigma \Delta t \sum_{i=1}^m X_i}$,

процес зміни ціни на акцію залежить від m , μ , σ^2 , Δt та X_i , $i = 1, \dots, m$. В силу центральної граничної теореми

$$\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m X_i = \sqrt{\frac{t}{m}} \sum_{i=1}^m X_{m,i} \rightarrow \sqrt{t} Z_t, m \rightarrow \infty,$$

де Z_t - стандартна гауссівська випадкова величина, а отже

$$S(t) \rightarrow S(0)e^{\mu t + \sigma \sqrt{t} Z_t},$$

тобто

$$S(t) \rightarrow S(0)e^{\mu t + \sigma w(t)}, m \rightarrow \infty.$$

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. Голіченко, І. І. Фінансова математика та елементи актуарної / І. І. Голіченко, О. І. Клесов, О. А. Тимошенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 104 с
2. Klesov O. I. Stochastic Differential Equations// Klesov O. I. – (Electronic edition), 2017. – 165p.
3. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5-06-005820-8
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Второе издание книги существенно переработано. М. : 1977. - 568 с.
5. Б. Оксендаль, Стохастические дифференциальные уравнения / . М.: Мир. 2003. 406 с.