

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Контрольні завдання

Варіант 1.

Задача 1.

У фінансовій математиці модель Кокса-Інгерсолл-Росса (*Cox–Ingersoll–Ross (CIR) Model*) описує еволюцію процентних ставок. Це тип «однофакторної моделі».

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) задано стандартний вінерівський процес $\{W(t), t \geq 0\}$. Розглянемо процес $X(t)$, який є розв'язком СДР

$$dX(t) = k(\theta - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t), \quad X(0) > 0$$

де k, θ, σ константи. Застосовуючи формулу Іто до $Z_1(t) = e^{kt} X(t)$ та $Z_2(t) = e^{2kt} X^2(t)$, знайти інтегральний вигляд $X(t)$ та $X^2(t)$.

Задача 2.

Припустимо, що $\{W(t), t \geq 0\}$ - вінерівський процес. Нехай задано σ -алгебру $F_s = \sigma(W(1), W(2), \dots, W(s))$. Знайти $E[W(2)W(3) + W(5) | F_3]$.

Задача 3.

3. Використовуючи формулу Іто знайти вираз, якому дорівнюватиме інтеграл

$$I(t) = \int_0^t W(s)dW(s), \quad t \geq 0$$

Задача 4.

Розв'яжіть СДР

$$dX(t) = -bX(t)dt + \sigma e^{-bt}dW(t), \quad t \geq 0, \quad \sigma, b \in \mathbb{R}.$$

«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ

ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Контрольні завдання

Варіант 2.

Задача 1.

Процес Орнштейна – Уленбека (*Ornstein–Uhlenbeck Process*) має широке застосування в фінансовій математиці та фізичних науках

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) задано стандартний вінерівський процес $\{W(t), t \geq 0\}$. Розглянемо процес $X(t)$, який є розв'язком СДР

$$dX(t) = k(\theta - X(t))dt + \sigma dW(t), \quad X(0) > 0,$$

де k, θ, σ константи. Застосовуючи формулу Застосовуючи формулу Іто до $Z_1(t) = e^{kt} X(t)$ знайти інтегральну формулу $X(t)$, середнє значення та дисперсію $X(t)$, для $X(0) = 1$.

Задача 2.

Припустимо, що $\{W(t), t \geq 0\}$ - вінерівський процес. Нехай задано σ - алгебру $F_s = \sigma(W(1), W(2), \dots, W(s))$. Знайти $E\left[3W^2(5) - W(1)W(2)W(4) \middle| F_3\right]$.

Задача 3.

Використовуючи формулу Іто знайти вираз, якому дорівнюватиме інтеграл

$$H(t) = \int_0^t W^2(s) dW(s), \quad t \geq 0$$

Задача 4.

Розв'яжіть СДР

$$dX(t) = \left(a + \frac{1}{2}b^2\right)X(t)dt + bX(t)dW(t), \quad t \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$