«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Вказівки до розв'язання контрольних завдань

Варіант 1.

Задача 1.

Застосуємо формулу Іто. Одержимо

$$dX(t) = kX(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} + k(\theta - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t),\ \ X(0) > 0.$$

Звідси $dX(t) = k\theta t dt, X(t) = \frac{1}{2}k\theta t^2.$

Задача 2.

$$E\left[W(2)W(3) + W(5)\middle| F_3\right] =$$

$$= E\left[W(2)W(3)\middle| F_3\right] + E\left[W(5)\middle| F_3\right] = \left[W(2)W(3)\right] + E\left[W(5) - W(3) + \mathrm{W}(3)\middle| F_3\right] =$$

$$\left[W(2)W(3)\right] + E\left[W(5) - W(3)\middle| F_3\right] + EW(3) = W(2)W(3) + W(3)$$

Задача 3.

Розглянемо процес $\mathrm{Z}(t) = \frac{1}{2}W^2(\mathrm{t}).$ Застосуємо для нього формулу Іто, в якості функції візьмемо $f(t,x) = \frac{1}{2}x^2(t),$ тоді $f_t'(t,x) = 0,\ f_x'(t,x) = x,\ f_{xx}'(t,x) = 1.$

Тобто $dI(t) = dZ(t) + \frac{1}{2}dt.$ Отже, $I(\mathrm{t}) = \frac{W^2(\mathrm{t})}{2} - \frac{1}{2}t.$

Задача 4.

Припустимо, що розв'язком рівняння є процес $X(t) = \sigma W(\mathrm{t})e^{-bt},\ t \ge 0,\ \sigma, b \in \mathbb{R}.$ Перевіримо це застосувавши формулу Іто з функцією $\mathrm{f}(t,x) = \sigma x e^{-bt}.$ Дійсно,

$$dX(t) = -b\sigma X(t)dt + \sigma e^{-bt}dW(t) + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot dt,\ \ t \ge 0,\ \sigma, b \in \mathbb{R}$$

«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Варіант 2.

Задача 1.

Застосуємо формулу Іто. Одержимо

$dX(t) = ke^{kt}X(t)\,\mathrm{dt} + e^{kt}k(\theta - X(t))dt + e^{kt}\sigma dW(t),\ \ X(0) > 0$.

Тобто $dX(t) = e^{kt}k\theta dt + e^{kt}\sigma dW(t),\ \ X(0) > 0$

Звідси $X(t) = X(0) + \theta e^{kt} + \int_0^t e^{ks}\sigma dW(\mathrm{s}),\ \ X(0) > 0$.

Отже, $EX(t) = \theta e^{kt}$ при $X(0) = 1$.

Задача 2.

$$E\left[3W^2(5) - W(1)W(2)W(4)\middle| F_3\right] =$$

$$= E\left[3(W(5) - W(3) + W(3))^2 - W(1)W(2)(W(4) - W(3) + W(3))\middle| F_3\right] =$$

$$= 3E(W(5) - W(3))^2 + 2W(3)E(W(5) - W(3) + W^2(3)) - W(1)W(2)W(3)$$

Задача 3.

Розглянемо процес $\mathrm{Z}(t) = \frac{1}{3}W^3(\mathrm{t})$. Застосуємо для нього формулу Іто, в якості функції візьмемо $f(t,x) = \frac{1}{3}x^3(t)$, тоді $f_t'(t,x) = 0,\ f_x'(t,x) = x^2,\ f_{xx}'(t,x) = 2x$.

Тобто $dH(t) = dZ(t) + W(t)dt$. Отже, $\mathrm{H(t)} = \frac{W^3(\mathrm{t})}{2} - \int_0^t W(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}$.

Задача 4.

Припустимо, що розв'язком рівняння є процес $X(t) = e^{at + bW(\mathrm{t})},\ t \ge 0,\ \sigma, b \in \mathbb{R}$.
Перевіримо це застосувавши формулу Іто з функцією $\mathrm{f}(t,x) = e^{at+bx}$.