Probability Theory

Chapter 1

Algebra of random events. Probability.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 2. Алгебра випадкових подій. Ймовірність

Частота. Статистичне визначення ймовірності.

Нехай в результаті n разового повторення деякого експерименту m разів відбувається подія A. Відношення m/n називається відносною частотою появи події A в серії з n випробувань. Теорія ймовірностей вивчає тільки події, для яких має місце властивість стійкості частот. Тобто, частота появи події A при великій кількості випробувань не значно відрізняється від певного числа.

Наприклад, якщо достатньо велику кількість разів підкидати монету, то частота випадіння цифри буде близькою до $0,5$. Частота народження дівчинки протягом 10 років у місті Києві буде мало відрізнятися від $0,485$.

Отже, ймовірністю події називається число, навколо якого концентруються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо $P(A)$ — ймовірність події A.

Якщо формулювати строго математичне статистичне означення, то можна сказати, що ймовірністю події є границя, до якої прямує відносна частота появи події при необмеженому зростанні кількості випробувань:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n}.$$

Алгебра випадкових подій. Аксіоми ймовірності

Ймовірність – це певна функція від випадкових подій. Ймовірність не завжди можливо визначити для довільних підмножин (випадкових подій) множини Ω. Доводиться обмежитися деяким класом підмножин. Необхідно, щоб цей клас був замкненим відносно операцій, введених для подій.

Означення 2.1. *Нехай Ω — деякий простір елементарних подій, а $\mathfrak{F}$ — деяка сукупність випадкових подій. Сукупність подій $\mathfrak{F}$ називається алгеброю подій, якщо виконуються умови:*

1) $\Omega \in \mathfrak{F}$;

2) якщо $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то $A \cup B \in \mathfrak{F}$, $A \setminus B \in \mathfrak{F}$.

Неможлива подія завжди входить до алгебри подій, оскільки $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, то $\bar{A} \in \mathfrak{F}$, оскільки $\bar{A} = \Omega \setminus A$. Нарешті, якщо $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$, тому що $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ (це випливає з другого закону де Морґана). Найменшою множиною подій, яка є алгеброю, очевидно, є множина $\mathfrak{F} = \{\Omega, \emptyset\}$, оскільки $\Omega \setminus \emptyset = \Omega \cup \emptyset = \Omega$, $\emptyset \setminus \Omega = \emptyset$.

Означення 2.2. *Алгебра подій $\mathfrak{F}$ називається σ-алгеброю або борелівською алгеброю, якщо з того, що $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, ...$, випливає, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.*

Відмітимо, що у випадку скінченної множини Ω будь-яка алгебра подій є σ-алгеброю.

Означення 2.3. *Числова функція P, визначена на σ-алгебрі подій $\mathfrak{F}$, називається ймовірністю, якщо*

1) $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3а) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (скінченна адитивність);

3б) якщо в послідовності подій $A_1, A_2, \ldots$ всі події попарно несумісні, то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (зліченна адитивність);

4) Нехай для послідовності подій, що зростає,

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_n \subset A_{n+1} \ldots \ \text{і} \ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

або для спадної послідовності подій

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset A_{n+1} \ldots \ \text{і} \ A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

тоді $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ (аксіома неперервності).

Трійку $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, де $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра, а P — ймовірність, будемо називати ймовірнісним простором.

Наслідки з аксіом імовірності

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Доведення. Оскільки $A \cup \bar{A} = \Omega$, то з означення 2.3 слідує, що

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

2) $P(\emptyset) = 0$.

Доведення. Оскільки $\bar{\Omega} = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$, то

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

3) **Теорема додавання ймовірностей.**

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right).$$

Доведення. Оскільки $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$, де доданки у правій частині є несумісними події, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$$

Але $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$, тому, аналогічно,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}),$$

звідки $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$, тому

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right).$$

4) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + \ldots P(A_n)$.

Доведення.

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) \leq P(A) + P(B),$$

оскільки $P(A \cap B) \geq 0$.

Для випадку n доданків нерівність можна довести, користуючись методом математичної індукції.

5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Доведення. Якщо $A \subset B$, то $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = A \cup (B \cap \bar{A})$, тому

$$P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A).$$

6) $\forall A \in \Omega$, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Доведення.

$$A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1.$$

Імовірність $P(A)$ можна визначити різними способами. Розглянемо основні підходи.

Класична схема визначення ймовірностей

Нехай простір елементарних подій є скінченною множиною:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}, \qquad N(\Omega) = N,$$

тобто є лише N можливих результатів випробування, які між собою попарно несумісні. Будемо вважати додатково, що всі елементарні події є рівноможливими. Наприклад, якщо експеримент полягає в одноразовому підкиданні грального кубика правильної форми, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі 6 результатів цього випробування природно вважати рівноможливими. Класичне означення ймовірності формулюють для подій, які є підмножинами множини Ω. Якщо $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_{N(A)}}\}$, де

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{N(A)} \leq N, \qquad N(A) = 0, 1, \ldots, N,$$

то ймовірність події A визначають за формулою:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \tag{1}$$

де $N(A)$ — кількість елементів множини A. Таким чином, ймовірністю події A називають відношення кількості події, що сприяють події A елементарних подій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування. Визначена за формулою (1) функція $P(A)$ задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей. З формули (1) випливає, що ймовірність кожної елементарної події ω_i є

$$P(\omega_i) = \frac{1}{N}, \qquad i = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Отож, класична схема означення ймовірності виконую роль моделлі тих випадкових явищ, для яких є природним припущення (2).

Приклад. Знайти ймовірності того, що серед k вибраних навмання цифр:

а) немає цифри 0;

б) немає цифри 1;

в) немає цифр 0 і 1;

г) немає цифри 0 або немає цифри 1.

Розв'язок. а) Імовірність того, що одна вибрана цифра не є 0, дорівнює $\frac{9}{10}$. Таким чином, імовірність того, що всі k цифр не є 0, дорівнює $P(A) = \left(\frac{9}{10}\right)^k$.

б) Аналогічно до попереднього

$$P(B) = \left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

в) Очевидно, що одночасно не вибрати цифри 0 та 1 можна з імовірністю $8/10$. Загальна ймовірність при k випробуваннях $P(A \cap B) = \left(\frac{8}{10}\right)^k$.

г) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2 \cdot 9^k - 8^k}{10^k}$.

Геометрична схема визначення ймовірностей

Класичне означення ймовірності не можна застосувати до випробуваннь, в яких множина Ω є незліченною множиною елементарних подій. Нехай простір елементарних подій Ω – це або відрізок числової прямої або частина площині або простору, а елементарнимиі подіями ω — окремі точки, що лежать у межах цієї області. Припустимо, що область Ω має скінченну міру $\mu(\Omega)$ (на прямій — довжину, на площині — площу, у просторі — об'єм). Розглянемо систему $\mathfrak{F}$ підмножин простору Ω, які мають міру. Відомо, що вони утворюють σ-алгебру. Тоді ймовірність будь-якої події $A \in \mathfrak{F}$ можна обчислити, користуючись наступним означенням.

Означення 2.4. *Геометричною ймовірністю події A називається відношення міри $\mu(A)$ до міри $\mu(\Omega)$, тобто $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.*

Можна показати, що введена таким чином геометрична ймовірність задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей.

Приклад. На відрізку довжини l навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує kl, де $0 < k < 1$?

Розв'язання. Нехай координати точок x та y. Очевидно, що

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l\}.$$

Отже, $\mu(\Omega) = l^2$. Тоді $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l, |x - y| \leq kl\}$. Звідси $x - kl \leq y \leq x + kl$, й $\mu(A) = l^2 - (l - kl)^2$. Таким чином,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{l^2 - (l - kl)^2}{l^2} = 1 - (1 - k)^2 = 2k - k^2.$$

Приклад (задача Бюффона). На поверхні стола проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює $2a$. На стіл кидають голку, довжина якої є $2l$ $(2l < 2a)$. Яка ймовірність того, що голка перетне одну з прямих?

Розв'язання. Нехай y – відстань від центру голки до найближчої прямої, θ — кут між голкою і прямою. Множина всіх можливих значень (θ, y) – простір ементарних подій: $\Omega = \{(\theta, y) | 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq y \leq a\}$. Подія $A = \{\text{голка перетинає пряму}\} =$

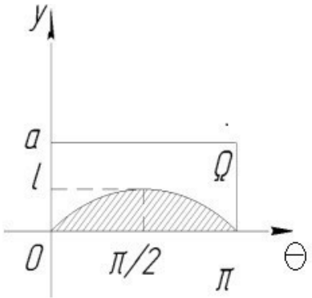

Рис. 1: Задача Бюффона

$\{(\theta, y)|0 \leq y \leq l\sin\theta\}$. Зобразимо на координатній площині Ω і A (заштрихована область на рисунку).

За геометричною ймовірністю:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \qquad S(\Omega) = a\pi,$$

$$S(A) = \int_0^\pi l\sin\theta d\theta = -l\cos\theta|_0^\pi = 2l.$$

Отже, $P(A) = \frac{2l}{a\pi}$. Задача Бюффона використовується для статистичного знаходження числа π. Це один із перших прикладів застосування метода Монте-Карло. З останньої рівності виразимо π: $\pi = \frac{2l}{aP(A)}$. Якщо експеримент по киданню голки виконати досить велику кількість разів та знайти частоту того, що голка перетинає прямі, тобто знайти статистичну ймовірність $\nu(A)$, тоді число π наближено дорівнює: $\pi \approx \frac{2l}{a\nu(A)}$.

Приклад (задача про зустріч). Двоє друзів домовилися зустрітися між 10-ою і 11-ою годинами у певному місці. Домовились, що чекатимуть один одного не більше 12 хв. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

Розв‘язання. Нехай x (хв) – час приходу після 10 години першого з друзів, а y (хв) – час приходу другого.

Множина всіх можливих значень часу приходу кожного з друзів —

$$\Omega = \{(x, y)|0 \leq x, y, \leq 60\}.$$

Подія $A = \{\text{зустріч відбулася}\}$ – означає, що різниця між часом приходу друзів не перевищує 12 хвилин. Тобто,

$$A = \{(x, y)|0 \leq x, y, \leq 60, |x - y| \leq 12\}.$$

Зобразимо A і Ω на координатній площині.

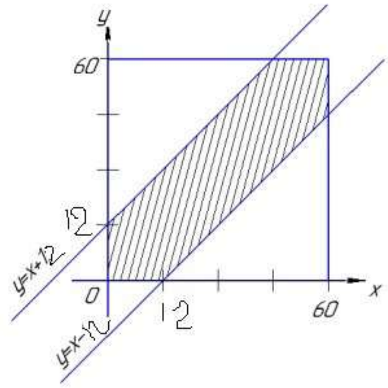

Рис. 2: Задача про зустріч

Знайдемо ймовірність події (за означенням геометричної ймовірності): $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$, де $S(A)$ – площа області, що відповідає події , $S(\Omega)$ – площа області, що відповідає простору елементарних подій Ω. $S(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3600$, $S(A) = 3600 - 48 \cdot 48 = 1296$. Остаточно, $P(A) = 0.36$.

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.