Probability Theory

Chapter 1

Full probability and Bayesian formulas.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 3. Формула повної ймовірності і формула Байєса.

Ймовірність суми подій.

Теорема 3.1. (Теорема додавання ймовірностей для несумісних подій). *Якщо події A, B – несумісні ($A \cap B = \emptyset$), то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їхніх ймовірностей:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Доведення теореми є наслідком означення 2.3.

Наслідок 3.1. *Якщо події A, B, C є попарно несумісними, тоді ймовірність суми подій дорівнює сумі їхніх ймовірностей:*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Наслідок 3.2. *Нехай $A_1, \ldots, A_n$ - попарно несумісні, тоді ймовірність суми подій дорівнює сумі їх ймовірностей:*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема 3.2. (Теорема додавання ймовірностей для сумісних подій).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Доведення. Оскільки $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$, де доданки у правій частині – несумісні події, тоді за означенням 2.3:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$$

Але $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$, тому, аналогічно,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}),$$

звідки $P(B \cap \bar{A}) = P(A) - P(A \cap B)$, тому

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right).$$

Приклад. У двох урнах лежать кульки, які відрізняються лише кольором. В першій урні лежить 5 білих кульок, 11 чорних та 8 червоних, а в другій лежить відповідно 10, 8, 6. З обох урн навмання дістають по одній кульці. Знайти ймовірність того, що обидві кульки будуть одного кольору?

Розв'язання. Позначимо: E – подія, яка полягає в тому, що обидві кульки однокольорові; A – обидві кульки білі; B – обидві кульки чорні; C – обидві кульки червоні; події A, B та C є несумісними, тоді з рівності $E = A \cup B \cup C$ випливає рівність $P(E) = P(A) + P(B) + P(C)$. Знайдемо ймовірності $P(A)$, $P(B)$ та $P(C)$:

$$P(A) = \frac{5}{24} \cdot \frac{10}{24} = \frac{25}{288}, \qquad P(B) = \frac{11}{24} \cdot \frac{8}{24} = \frac{44}{288}, \qquad P(C) = \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} = \frac{24}{288}.$$

Отже, $P(E) = \frac{25}{288} + \frac{44}{288} + \frac{24}{288} = \frac{31}{96} \approx 0.323$.

Умовні ймовірності. Незалежні події. Імовірність добутку подій

Розтлумачимо за допомогою приклада зміст умовної ймовірності. Нехай двічі підкидають гральний кубик. Тоді простір елементарних подій складають 36 елементів: $\Omega = \{(i,j) : i,j = \overline{1,6}\}$. Нехай подія $A = \{$сума очок після двох підкидань дорівнює 5$\}$, тоді $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Нехай результат першого підкидання – випадіння 3 очок (подія $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)(3,5),(3,6)\}$). Тоді ймовірність події A зміниться: сумарна кількість очок дорівнюватиме 5 лише тоді, коли другий раз випаде число 2, тобто в одному випадку з шести. Таким чином, ймовірність події A за умови, що відбулась подія B, $P(A/B) = \frac{1}{6}$. В загальному випадку розмірковуємо таким чином. Якщо відбулась подія B, то й відбулася одна з $N(B)$ елементарних подій. Серед них подія A з'являється $N(A \cap B)$ разів. Отже,

$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A \cap B)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

У випадку загальної ймовірнісної моделі рівність

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B) > 0. \tag{3}$$

приймається за означення **умовної ймовірності**. З цього означення випливають наступні властивості умовної ймовірності:

1) $P(A/B) \geq 0$;

2) $P(\Omega/B) = 1$;

3) $P(B/B) = 1$;

4) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P((A_1 \cup A_2)/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$.

Доведення.
2) $P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
3) $P(B/B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
4) $P((A_1 \cup A_2)/B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1/B) + P(A_2/B)$.

Теорема 3.3. (Теорема множення ймовірностей). *Якщо $P(A) > 0$, P(B)>0, то*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{4}$$

Доведення теореми випливає з рівності (3).

Приклад. Нехай двічі підкидають гральний кубик. Обчисліть ймовірність $P(A \cap B)$.

Розв'язання. $P(A/B) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{6}{36} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

Дійсно, $AB = \{(3,2)\}$, і за класичним означенням $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.
Формулу множення ймовірностей (4) можна узагальнити для випадку будь-якої скінченної кількості подій.

Наслідок 3.3. *Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — випадкові події такі, що $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Тоді*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}). \quad (5)$$

Формулу (5) доводять методом математичної індукції.
Введемо поняття незалежності випадкових подій. Нехай Ω – простір елементарних подій, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ – випадкові події.

Означення 3.1. *Події A і B називаються незалежними, якщо*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,.$$

Приклад. Монету підкидають двічі. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що при першому підкиданні випав герб, B — подія, яка полягає в тому, що за другим разом випав герб. Перевірити, чи будуть незалежними події A і B.
Розв'язання. Простором елементарних подій даного експерименту є множина $\Omega = \{ГГ, ЦЦ, ГЦ, ЦГ\}$. Тоді $A = \{ГГ, ГЦ\}$, $B = \{ГГ, ЦГ\}$, $AB = \{ГГ\}$.

$P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, а $P(AB) = \frac{1}{4}$. Отже, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, тому випадкові події A і B – незалежні.
Розглянемо найважливіші властивості ймовірностей для незалежних подій.

1. Якщо події A і B незалежні, то

$$P(A/B) = P(A), \qquad (\text{якщо } P(B) > 0),$$

$$P(B/A) = P(B), \qquad (\text{якщо } P(A) > 0).$$

Доведення випливає з теореми множення ймовірностей.

2. Якщо події A і B є незалежними, то незалежними будуть також A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

Доведення. Для обґрунтування цієї властивості досить довести, що події A і $\bar{B}$ незалежні.Оскільки $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ і $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$, то $P(A) = P(A \cap B) + P(A\bar{B})$.

Звідси

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}),$$

отже, A і $\bar{B}$ незалежні.

Якщо маємо множину подій, у якій більше, ніж дві події, то формула для обчислення ймовірності їхнього добутку є простішою, якщо ці події є незалежними в сукупності.

Означення 3.2. *Випадкові події $A_1, \ldots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо*

$$P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right)$$

для будь-яких $k = 2, \ldots, n$ і $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Якщо ця рівність виконується при $k = 2$, то події $A_1, \ldots A_n$ називаються попарно незалежними.

Для незалежних у сукупності подій $A_1, \ldots, A_n$ ймовірність їх добутку дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n).$$

Відмітимо, що попарно незалежні події не обов'язково незалежні в сукупності. Для цього розгляньмо приклад, наведений С.Н.Бернштейном.

Приклад. На площину кидають тетраедр, три грані якого пофарбовані відповідно в червоний, синій, жовтий кольори, а на четверту грань нанесено всі три кольори. Введемо випадкові події: A_1 – випадає грань із червоним кольором; A_2 – випадає грань із синім кольором; A_3 – випадає грань із жовтим кольором. Перевіримо, чи будуть ці події незалежними в сукупності.

Розв'язання. Очевидно, що

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$; $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$; $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$. Отже, події A_1, A_2, A_3 є попарно незалежними. Проте ці події не є незалежними в сукупності, бо

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

Приклад. Нехай $A_1, \dots, A_n$ — випадкові події, незалежні в сукупності, і відомі їхні ймовірності: $P(A_1), \dots P(A_n)$. Визначити ймовірність події A, яка полягає в тому, що в результаті проведення експерименту відбудеться хоча б одна з подій $A_1, \dots, A_n$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Розглянемо протилежну подію $\bar{A}$. Ця подія полягає в тому, що в результаті виконання експерименту не відбудеться жодної з подій $A_1, \dots, A_n$, тобто одночасно відбудуться події $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$.Тому $\bar{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ і внаслідок незалежності подій $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1), \dots, P(\bar{A}_n).$$

Отже,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n),$$

тобто ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій $A_1, \dots, A_n$ дорівнює різниці між одиницею й добутком імовірностей протилежних до них подій.

Формула повної ймовірності і формула Байєса.

Означення 3.3. *Випадкові події $H_1, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій, якщо:*
1) H_i - попарно несумісні ($H_i \cap H_k = \emptyset, \quad i \neq k$);
2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Нехай подія A може відбуватися в різних умовах, яким відповідають попарно несумісні події $H_1, \dots, H_n$, що утворюють повну групу. Назвімо їх гіпотезами.

Нехай відомі ймовірності $P(H_1), \dots, P(H_n)$ та умовні ймовірності $P(A/H_1), \dots, P(A/H_n)$. Як знайти $P(A)$ у цьому випадку?

Теорема 3.4. *Якщо $H_1, \dots, H_n$ – повна група попарно несумісних подій і $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, то для будь-якої події A справедлива рівність:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i). \tag{6}$$

Доведення. Оскільки події $H_1, \dots, H_n$ утворюють повну групу подій, то $H_1 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$, і подію A можна записати так:

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup \ldots \cup H_n) = (H_1 \cap A) \cup \ldots \cup (H_n \cap A),$$

де всі множини, які входять в об'єднання, у правій частині — попарно несумісні події. Використовуючи аксіому адитивності та теорему множення ймовірностей, отримаємо:

$$P(A) = P((H_1 \cap A) \cup \ldots \cup (H_n \cap A)) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i),$$

що й треба було довести.

Рівність (6) називають формулою повної ймовірності. Вона надає ймовірність події A за умови, що відбулася одна і тільки одна з попарно несумісних подій $H_1, \dots, H_n$. Якщо додатково припустити, що $P(A) > 0$, то за теоремою множення ймовірностей можемо записати:

$$P(A \cap H_k) = P(A) P(H_k/A),$$

звідки

$$P(H_k/A) = \frac{P(A \cap H_k)}{P(A)} = \frac{P(A/H_k) P(H_k)}{P(A)}$$

або

$$P(H_k/A) = \frac{P(A/H_k) P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)}, \qquad k = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Формули (7) називаються формулами Байєса (формулами ймовірностей гіпотез). Їм можна дати таке тлумачення. Нехай подія A може відбуватись в різних умовах, щодо яких можна зробити n припущень (гіпотез) $H_1, \dots, H_n$. Ймовірності цих гіпотез $P(H_k)$ нам відомі, як і умовні ймовірності $P(A/H_k)$ події A за умови здійснення кожної гіпотези. Якщо в результаті експерименту подія A відбулась, то за формулами Байєса ми можемо переоцінити ймовірності кожної з гіпотез, знайшовши $P(H_k/A)$.

Приклад. Зі скриньки, що містить 5 білих і 3 чорних кулі, одна куля невідомого кольору загублена. Знайти ймовірність витягнути навмання зі скриньки білу кулю (подія A)? Яка ймовірність того, що загублено чорну кулю, якщо витягнута навмання куля виявилась білою?

Розв'язання. Тут можливі дві події-гіпотези: H_k загублено k білих куль $(k = 0; 1)$.

Очевидно, події H_0, H_1 несумісні й утворюють повну групу, а їхні ймовірності становлять: $P(H_0) = \frac{3}{8}$, $P(H_1) = \frac{5}{8}$. Відповідні умовні ймовірності становлять: $P(A/H_0) = \frac{5}{7}$, $P(A/H_1) = \frac{4}{7}$.

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_0)P(A/H_0) + P(H_1)P(A/H_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{8}.$$

Ймовірність $P(H_0/A)$ обчислимо за формулою Байєса:

$$P(H_0/A) = \frac{P(H_0)P(A/H_0)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{7}.$$

Приклад. Із урни, яка містить m $(m > 3)$ білих і n чорних кульок, загублено одну кульку. Для того щоб визначити склад кульок в урні, із неї витягли дві кульки, які виявилися білими. Яка ймовірність того, що була втрачена біла кулька?

Розв'язання. Введемо наступні події: A–витягли дві білі кульки; H_1– загубили білу кульку; H_2– загубили чорну кульку. Події H_1 і H_2 утворюють повну групу подій. $P(H_1) = \frac{m}{n+m}$, $P(H_2) = \frac{n}{n+m}$, $P(A/H_1) = \frac{C^2_{m-1}}{C^2_{m+n-1}} = \frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)}$, $P(A/H_2) = \frac{C^2_m}{C^2_{m+n-1}} = \frac{(m-1)m}{(m+n-1)(m+n-2)}$. За формулою повної ймовірності знайдемо ймовірнісь того, що було витягнуто дві білі кульки.

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$

$$= \frac{m}{n+m} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)} + \frac{n}{n+m} \cdot \frac{(m-1)m}{(m+n-1)(m+n-2)} =$$

$$= \frac{m(m-1)(n+m-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

За формулою Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{m}{n+m} \cdot \frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)}}{\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}} = \frac{m-2}{n+m-2}.$$

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І.

Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.