Probability Theory

Chapter 1

Bernoulli's scheme.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 4. Схема Бернуллі.

Нехай проводиться фіксована кількість однакових есперіментів, в кожному з яких можливі лише два несумісних результати: певна подія A може відбутися або не відбутися. Наприклад, при пострілах у мішень можна влучити (подія A), або не влучити (подія $\bar{A}$).

Означення 4.1. *Якщо ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то випробування називаються незалежними стосовно події A.*

Означення 4.2. *Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів A або $\bar{A}$, у кожному з яких подія A має постійну ймовірність $P(A)$, називається схемою Бернуллі.*

Таким чином, якщо випробування проводяться за схемою Бернуллі, то в кожному з них можливий тільки один з двох результатів: A (успіх) або $\bar{A}$ (невдача), до того ж імовірності $P(A) = p$ і $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ будуть однаковими в кожному випробуванні. Позначимо через μ_n кількість успіхів (кількість появ події A) в серії із n послідовних незалежних випробувань за схемою Бернуллі і обчислимо ймовірність того, що кількість успіхів в n випробуваннях буде дорівнювати k ($P\{\mu_n = k\} = P_n(k)$), за умови, що ймовірність успіху в кожному випробуванні $P(A) = p$. Подію $\{\mu_n = k\}$ можна записати у вигляді

$$\{\mu_n = k\} = (\underbrace{A \cap \ldots \cap A}_{\text{k разів}} \cap \underbrace{\bar{A} \cap \ldots \cap \bar{A}}_{\text{n-k разів}}) \cup$$

$$\cup (\bar{A} \cap \underbrace{A \cap \ldots \cap A}_{\text{k разів}} \cap \underbrace{\bar{A} \cap \ldots \bar{A}}_{\text{n-k-1 разів}}) \cup \ldots \cup (\underbrace{\bar{A} \cap \ldots \cap \bar{A}}_{\text{n-k разів}} \cap \underbrace{A \cap \ldots \cap A}_{\text{k разів}}).$$

Оскільки випробування незалежні, то ймовірність кожної з подій, що входять в об-єднання у правій частині, дорівнює $p^k q^{n-k}$. Всі ці перетини подій — попарно несумісні події, а їхня кількість дорівнює числу комбінацій з n по k, тобто

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Застосовуючи теорему про суму ймовірностей, отримаємо:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{8}$$

Формулу (8) називають біноміальною формулою або формулою Бернуллі. Це формула для обчислення ймовірності того, що кількість успіхів у серії з n послідовних незалежних випробувань за схемою Бернуллі дорівнює k. Сукупність чисел $P_n(k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ називають біноміальним розподілом.

Події $\{\mu_n = 0\}, \{\mu_n = 1\}, \ldots, \{\mu_n = n\}$ утворюють повну групу подій, а тому

$$\{\mu_n = 0\} \cup \{\mu_n = 1\} \cup \ldots \cup \{\mu_n = n\} = \Omega,$$

і

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = P(\Omega) = 1.$$

Цю формулу можна також отримати іншим способом:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Приклад. Обчислити ймовірність того, що при 5 підкиданнях симетричної монети випаде герб від 2 до 4 раз?

Розв'язок. Якщо $P_5(k)$ — ймовірність того, що випало рівно k гербів, то шукана ймовірність дорівнює:

$$P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) = \sum_{k=2}^{4} C_5^k \,(0,5)^k \,(0,5)^{5-k} = 25 \cdot (0,5)^5 = \frac{25}{32}.$$

Найбільш імовірна кількість успіхів у випробуваннях за схемою Бернуллі

Теорема 4.1. *Найбільш імовірна кількість успіхів k_0 в n випробуваннях за схемою Бернуллі задовольняє умові $np-q \le k_0 \le np+p$. Якщо $(n+1)p$ — неціле число, то існує єдине таке значення $k_0 = [(n+1)p]$, якщо $(n+1)p$ — ціле число, то таких значень буде два:* $k_0 = \left[\begin{array}{l} (n+1)p, \\ (n+1)p-1. \end{array} \right.$

Доведення. Розглянемо відношення

$$\frac{P_n(k+1)}{P_(k)} = \frac{C_n^{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p}{\frac{n!}{k!(n-k)!}q} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$$

Таким чином, $P_n(k+1) > P_n(k)$, якщо $(n-k)p > (k+1)q$, тобто $np - q > k(p+q) = k$. Тому

$$\begin{cases} P_n(k+1) > P_n(k), & \text{якщо } k < np-q; \\ P_n(k+1) = P_n(k), & \text{якщо } k = np-q; \\ P_n(k+1) < P_n(k), & \text{якщо } k > np-q; \end{cases} \tag{9}$$

Це означає, що зі зростанням k величина $P_n(k)$ спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Знайдемо, при якому k буде досягатися максимум. Можливі два таких випадки.

1) $np-q$ — неціле число. Тоді число $np-q+1 = np+p$ також неціле і існує єдине ціле число k_0, що задовольняє умові $np-q < k_0 < np+p$.

Покажемо, що k_0 — найбільш імовірна кількість успіхів, тобто що $P_n(k)$ досягає максимального значення при $k = k_0$. Дійсно, оскільки $k_0 - 1 < np - q$, то відповідно до першого співвідношення (9) $P_n(k_0) > P_n(k_0-1)$, і через те, що $k_0 > np-q$, то із третього співвідношення (9) випливає, що $P_n(k_0+1) < P_n(k_0)$. Звідси отримуємо, $P_n(k_0) > P_(k)$ для всіх $k \ne k_0$, тобто k_0 — найбільш імовірна кількість успіхів.

2) $np-q$ — ціле число. Позначимо $k_1 = np-q$, тоді $k_1 + 1 = np - q + 1 = np + p$. Згідно з другим співвідношенням (9) $P_n(k_1+1) = P_n(k_1)$. Оскільки $k_1 - 1 < np - q$ і $k_1 > np - q$, то з першого і третього співвідношень (9) випливає, що $P_n(k_1) > P_n(k_1-1)$

і $P_n(k_1+2) < P_n(k_1+1)$. Таким чином, у цьому випадку є два найбільш імовірних значення: $k_0 = k_1$ і $k_0 = k_1 + 1$. В загальному випадку, $np - q \le k_0 \le np + p$.

Приклад. Кубик підкидають 5 разів. Знайти найбільш імовірну кількість випадінь трійки?

Розв'язання. Згідно умови, $n = 5$, $p = 1/6$, $q = 5/6$, $np = 5/6$, $np - q = 0$, $np + p = 1$. Таким чином, $0 \le k_0 \le 1$, і буде два значення найбільш імовірного числа випадінь трійки: $k_0 = 0$ і $k_0 = 1$.

Твірна функція

Доволі часто доводиться мати справу з незалежними, але неоднорідними випробуваннями (тобто, ймовірність успіху відрізняється у різних випробуваннях). Нехай у n послідовних незалежних експериментах ймовірності успіхів дорівнюють, відповідно, $p_1, \ldots, p_n$. Таким чином, ймовірностями невдач будуть, відповідно, $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$,..., $q_n = 1 - p_n$.

Означення 4.3. *Твірною функцією $F_n(z)$, для послідовності незалежних експериментів з ймовірностями успіхів $p_1, \ldots, p_n$, називають функцію, визначену рівністю*

$$F_n(z) = (p_1 z + q_1) \cdot \ldots \cdot (p_n z + q_n).$$

Імовірність того, що в n неоднорідних випробуваннях успіх буде m разів обчислюється як коефіцієнт при z^m у твірній функції.

Приклад. 3 стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Імовірності влучення у мішень для них дорівнюють 0,9, 0,8, 0,7 відповідно. Обчислитить ймовірності таких подій:

1) не буде жодного влучення;

2) буде рівно одне влучення;

3) буде рівно два влучення;

4) всі стрільці влучать у мішень.

Розв'язання. Складемо твірну функцію:

$$F_n(z) = (0.9z + 0.1)(0.8z + 0.2)(0.7z + 0.3) = (0.72z^2 + 0.26z + 0.02)(0.7z + 0.3) =$$

$$= 0.504z^3 + 0.398z^2 + 0.092z + 0.006.$$

Позначимо події: $A = \{$не буде жодного влучення$\}$; $B = \{$буде рівно одне влучення$\}$; $C = \{$буде рівно два влучення$\}$; $D = \{$всі стрільці влучать в мішень$\}$. Тоді, $P(A) = 0.006$; $P(B) = 0.092$; $P(C) = 0.398$; $P(D) = 0.504$.

Поліноміальна схема

Схему незалежних випробувань Бернуллі ще називають біноміальною схемою, оскільки в ній розглядається послідовність випробувань з двома можливими результатами: "успіх"чи "невдача". Цю схему можна узагальнити на випадок поліноміальної схеми n незалежних випробувань, в кожному з яких є $k > 2$ можливих результатів (попарно несумісних подій $A_1, \ldots, A_k$) з відповідними ймовірностями $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$,..., $p_k = P(A_k)$, $0 < p_i < 1$, $i = \overline{1, k}$.

В цьому випадку простір елементарних подій буде мати вигляд: $\Omega = \left\{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in A_1, \ldots, A_k, i = \overline{1, n}\right\}$ і складається з k^n елементарних подій. Оскільки події є незалежними, то $P(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1) \cdot \ldots \cdot P(x_n)$.
Нехай i_1 – число виконання події A_1, ..., i_k – число виконання події A_k, $i_1 + \ldots + i_k = n$. Тоді ймовірність того, що подія A_1 відбудеться рівно i_1 разів, ..., A_k відбудеться рівно i_k раз знаходиться за формулою:

$$P_n(i_1, \ldots, i_k) = \frac{n!}{i_1! \ldots i_k!} p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}.$$

Приклад. На кожен лотерейний квиток з імовірністю $p_1 = 0.01$ може випасти великий виграш, з імовірністю $p_2 = 0.1$ – малий виграш та з імовірністю p_3 – квиток може бути без виграшу, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Придбали 15 квитків. Обчисліть ймовірність отримати 1 велий виграш та 2 маленьких.

Розв'язання. Ймовірність того, що з n випробувань $i_1 = 1$ закінчаться з першим результатом, $i_2 = 2$ -– з другим результатом, $i_3 = 15 - 1 - 2 = 12$ — з третім результатом дорівнює:

$$P(A) = \frac{15!}{1!2!12!} \cdot 0.01^1 \cdot 0.1^2 \cdot (1 - 0.1 - 0.01)^{12} \approx 0.034.$$

Гранична теорема Пуассона

При вивченні випадкових явищ буває, що у випробуваннях за схемою Бернуллі числа n і k — великі, тоді при обчисленні ймовірностей $P_n(k)$ за біноміальною формулою виникають деякі труднощі. В цьому випадку для обчислення біноміальних імовірностей застосовують наближені формули, які випливають із теорем Муавра-Лапласа й граничної теореми Пуассона. Назва "гранична" в обох випадках пов'язана з тим, що ці теореми встановлюють поведінку ймовірностей $P_n(k)$ або $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ за умови, що $n \to \infty$.

Теорема 4.2. (**Гранична теорема Пуассона**). *Нехай ймовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань Бернуллі дорівнює p, $n \to \infty$ і $p \to 0$ так, що $np \to \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$, тоді*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

для будь-якого $k = 0, 1, 2, \ldots$, де $P_n(k)$ — ймовірність появи рівно k успіхів в n випробуваннях.

Доведення. Позначимо $np = \lambda_n$ (тоді $\lambda_n \to \lambda$), обчислимо ймовірність рівно k успіхів в n випробуваннях:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \underset{n\to\infty}{\to}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to} \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

що й треба було довести.

З чого випливає, що при великих n $(n > 100)$ і маленьких p $(np < 30)$ можна користуватися наближеними формулами:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{10}$$

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{11}$$

Формули (10) і (11) називаються асимптотичними формулами Пуассона. Друга з цих формул дає наближене значення ймовірності того, що кількість успіхів в n випробуваннях міститься між заданими числами k_1 і k_2. Нерівність

$$\left| \sum_{k \in M} P_n(k) - \sum_{k \in M} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| < np^2,$$

яка буде правильною для довільної множини $M \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$, використовується для визначення точності асимптотичних формул Пуассона. В тому числі, якщо M складається з одного числа k, то

$$\left| P_n(k) - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right| < np^2. \tag{12}$$

Складено спеціальні таблиці значень виразу $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, який розглядається як функція двох змінних k і λ. Позначимо $P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Набір значень

$$\{P(k) : k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

називається розподілом Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Приклад. Ймовірність виготовлення бракованого виробу дорівнює 0,02. Обчисліть ймовірність того, що у партії зі 100 виробів буде не більше 3 бракованих.

Розв'язок. Використаємо теорему Пуассона. В даному прикладі $n = 100$, $p = 0,02$, $\lambda = np = 100 \cdot 0,02 = 2$. Тоді

$$P\{\xi \le 3\} = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) \approx e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4e^{-2}}{2!} + \frac{8e^{-2}}{3!} = 0,8571.$$

Граничні теореми Муавра-Лапласа

Теорема 4.3. (Локальна формула Муавра-Лапласа). *Нехай ймовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань у схемі Бернуллі дорівнює p, $0 < p < 1$. Тоді для великих n імовірність $P_n(k)$ появи рівно k успіхів в n випробуваннях обчислюється за асимптотичною формулою:*

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}, \qquad \text{якщо } x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \tag{13}$$

де $\varphi = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ *— функція Гаусса.*

При цьому визначено, що відносна похибка формули (13) прямує до нуля, коли $n \to \infty$.

В більшості підручників з теорії ймовірностей наведено таблиці значень функції $\varphi(x)$ для $0 \le x \le 3,99$. Щоб обчислити значення $\varphi(x)$ при від'ємних значеннях $-3,99 \le x \le 0$, використовують парність функції $\varphi(x)$, а для $|x| > 3,99$ приймають, що $\varphi(x) = 0$.

Теорема 4.4. (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа). *Якщо ймовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань Бернуллі дорівнює p, $0 < p < 1$, а μ_n — кількість успіхів в n випробуваннях, тоді*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

для довільних a, b ($-\infty \le a \le b \le \infty$).

На підставі цієї теореми для великих значень n можна отримати асимптотичну формулу для ймовірності $P_n\{k_1 \le \mu_n \le k_2\}$. Позначимо

$$k_1 = a\sqrt{npq} + np, \qquad k_2 = b\sqrt{npq} + np.$$

Тоді

$$P\left\{a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right\} = P\{a\sqrt{npq} + np \le \mu_n \le b\sqrt{npq} + np\} = P_n\{k_1 \le \mu_n \le k_2\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Вводиться функція Лапласа для простішого запису цієї наближеної формули:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

З того, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_1}^{k_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{k_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{k_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

отримаємо

$$P_n\{k_1 \le \mu_n \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (14)$$

Функція Лапласа $\Phi(x)$ є табульованою для $0 < x < 5$. Щоб обчислити значення $\Phi(x)$ для від'ємних значень $-5 < x < 0$, використовують непарність функції: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Більше властивостей цієї функції розглянемо пізніше.

Приклад. Монету підкидають 100 разів. Обчисліть ймовірність того, що число випадінь герба буде від 45 до 55.

Розв'язок. За умовою задачі $n = 100$, $p = q = 0,5$, $npq = 25$, $np = 50$. За локальною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P\{45 \le \xi \le 55\} = P\left\{\frac{45-50}{\sqrt{25}} \le \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{55-50}{\sqrt{25}}\right\} = 2\Phi\,(1) = 0,6826.$$

Зауваження. Точність асимптотичних формул (13) і (14) суттєво залежить від співвідношення між величинами n і p. Зокрема, хороші наближення ці формули дають при $p = q = 1/2$, часто їх використовують, коли $npq \ge 10$. Отже, бачимо, що чим ближче одне з чисел p або q до нуля, то тим більшим потрібно вибирати n. Тому у випадку близькості однієї з величин p або q до нуля, формулами (13) і (14) зазвичай не користуються; в цьому випадку значно точнішими є формули Пуассона.

Теорема Бернуллі про стійкість відносних частот

Нехай ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних випробувань Бернуллі дорівнює p. Для довільного числа $\epsilon > 0$ обчислимо на підставі інтегральної теореми Муавра-Лапласа ймовірність події $\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \epsilon\right\}$ при $n \to \infty$, де $\frac{\mu_n}{n}$ — відносна частота події. Перепишемо

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \epsilon\right\} = P\left\{-\epsilon \le \frac{\mu_n}{n} - p \le \epsilon\right\} = P\left\{-\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \underset{n\to\infty}{\to}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(+\infty) - \Phi(-\infty) = 2 \cdot 0,5 = 1$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \epsilon\right\} = 1$$

Ця формула виражає теорему Бернуллі.

Теорема 4.5. (Теорема Бернуллі). *Нехай в кожному з серії незалежних випробувань випадкова подія відбувається з однаковою ймовірністю p, тоді для достатньо великої кількості випробувань з імовірністю як завгодно близькою до 1, відхилення відносної частоти появи цієї події від її ймовірності p не перевищуватиме як завгодно малого наперед заданого числа ϵ.*

Оскільки для великих n

$$P\left\{-\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le \epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

то для таких n використовують асимтотичну формулу

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \epsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{15}$$

Приклад. 100 разів підкидається симетрична монета. Знайти межі інтервалу, в якому міститься частота випадіння цифри з імовірністю 0,9545.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 100$, $p = q = 0,5$ і

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - 0,5\right| \le \epsilon\right\} = 0,9545.$$

За формулою (15) маємо, що $0,9545 = 2\Phi\left(\epsilon\sqrt{\frac{100}{0,25}}\right) \Leftrightarrow \Phi(20\epsilon) = 0,47725$. З таблиці значень функції Лапласа отримаємо, що $20\epsilon = 2 \Rightarrow \epsilon = 0,1$. Із нерівності $\left|\frac{\mu_n}{n} - 0,5\right| \le 0,1$ випливає, що $40 \le \mu_n \le 60$, тобто з імовірністю $0,9545$ цифра може з'явитися від 40 до 60 разів.

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.