Probability Theory

Chapter 2

Random variables. Distribution function. Density

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 5. Випадкові величини. Функція розподілу випадкової величини. Щільність ймовірності.

Поняття випадкової величини. Функція розподілу випадкової величини і її властивості.

Оскільки результат випадкового експерименту може змінюватися кожного разу, коли його проводять за тих самих умов, то кількісна ознака, яка в ньому розглядається, є змінною величиною, до того ж такою, що залежить від випадку. Таким чином, випадкова величина — це величина, яка в результаті експерименту з випадковим результатом набуває того або іншого числового значення. Прикладами випадкових величин, які приймають різні числові значення під впливом багатьох випадкових факторів, можуть бути:
а) кількість очок, які випадутьна верхній грані грального кубика за одне підкидання;
б) кількість якісних деталей серед n навмання вибраних;
в) кількість підкидань монети до першої появи цифри;
г) кількість викликів, які надходять на телефонну станцію протягом доби;
д) тривалість часу обслуговування покупця на касі в супермаркеті;
е) час виконання задачі студентом з математичного аналізу і т. д.
Випадкові величини позначаються великими літерами $X, Y, Z, \ldots$, латинського алфавіту і маленькими літерами грецького алфавіту $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, а їх можливі значення — маленькими літерами $x, y, z, \ldots$.

В прикладах, згаданих вище, виникали два типи випадкових величин: дискретні величини, множини можливих значень яких скінченні або зліченні, зокрема, приклади а) - г) і неперервні величини, множини можливих значень яких повністю заповнюють деякий інтервал, - приклади д), е). Відмітимо, що за теоретико-множинним трактуванням основних понять теорії ймовірностей випадкова величина X є функцією від елементарної події: $X = X(\omega)$, де ω елементарна подія, що належить простору Ω ($\omega \in \Omega$).

Множина можливих значень випадкової величини X складається з усіх значень, яких набуває функція $X(\omega)$. Якщо ця множина є скінченною або зліченною, то випадкова величина X називається дискретною, якщо незліченною - неперервною.

Приклади дискретних і неперервних випадкових величин.

1. Симетричну монету підкидають два рази. Нехай випадкова величина X — кількість появ цифри. Простір елементарних подій буде складатися з чотирьох елементів: $\Omega = \{\omega_1 = (\text{ГГ}), \omega_2 = (\text{ЦГ}), \omega_3 = (\text{ГЦ}), \omega_4 = (\text{ЦЦ})\}$. Таблиця значень випадкової величини буде мати наступний вигляд:

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$X(\omega_i)$	0	1	1	2

2. Нехай випадкова величина Y є час очікування пасажиром автобуса на зупинці. Відомо, що проміжок часу між прибуттям автобусів не перевищує T, тоді значення Y будуть належати відрізку $[0, T]$.

Щоб описати випадкову величину, необхідно вказати множину її можливих значень і визначити ймовірності всіх можливих елементарних подій, які визначають випадкову величину (наприклад, імовірність того, що вона прийме те чи інше значення або потрапить у деякий інтервал). Такий опис випадкової величини називається її законом розподілу. У випадку довільного ймовірнісного простору $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ не всі функції, визначені на Ω, можна розглядати у якості випадкових величин. При вивченні законів розподілу випадкових величин буває, що доводиться відповідати на питання: яка ймовірність того, що значення випадкової величини $X(\omega)$ належать певній множині?

Означення 5.1. *Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — імовірнісний простір. Випадковою величиною будемо називати дійсну функцію $X = X(\omega)$, визначену на Ω і таку, що для довільного* *дійсного числа x виконується співвідношення:* $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$.

Означення 5.2. *Функція дійсної змінної x, $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, яка задається рівністю*

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} = P\{X < x\},$$

називається функцією розподілу випадкової величини $X = X(\omega)$.

Функція розподілу є найбільш загальною характеристикою закону розподілу, застосовується для опису всіх випадкових величин (як дискретних, так і неперервних). Знаючи функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X, можна обчислити ймовірності будь-яких подій, що з нею пов'язані.

Властивості функції розподілу

1) *Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення з проміжку $[a, b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто*

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

Доведення. Оскільки $\{X < b\} = \{X < a\} + \{a \leq X < b\}$, то за аксіомою адитивності (події-доданки - несумісні):

$$F(b) = P\{X < b\} = P\{X < a\} + P\{a \leq X < b\} = F(a) + P\{a \leq X < b\},$$

звідки $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$.

2) *Значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.*

3) *Якщо $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$, тобто $F(x)$ — неспадна функція.*

Доведення. Якщо $x_1 \leq x_2$, то $A = \{X < x_1\} \subset B = \{X < x_2\}$, тому $P(A) \leq P(B)$, тобто $F(x_1) \leq F(x_2)$.

4)

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \quad i \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Доведення. $F(\infty) = P\{X < \infty\} = P(\Omega) = 1$, $F(-\infty) = P\{X < -\infty\} = P(\emptyset) = 0$.

5)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), \text{ *тобто функція* } F(x) \text{ — *неперервна зліва.*}$$

Доведення. Розглянемо довільну зростаючу числову послідовність

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

і позначимо $A_n = \{x_n \leq X < x_0\}$. Тоді послідовність подій

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

спадає, причому $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. За аксіомою неперервності $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\varnothing) = 0$. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P\{x_n \leq X < x_0\} = \lim_{n\to\infty} (F(x_0) - F(x_n)) = F(x_0) - F(x_0 - 0) = 0.$$

6) $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x)$.

Доведення. $A = \{X = x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, де $A_n = \left\{x \leq X < x + \frac{1}{n}\right\}$. Тоді послідовність подій $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ є спадною. За аксіомою неперервності ймовірності

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n), \quad P\{X = x\} = \lim_{n\to\infty} \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) = F(x+0) - F(x).$$

Дискретна випадкова величина

Означення 5.3. *Випадкову величину називають дискретною, якщо множина її можливих значень є скінченною або зліченною.*

Нехай X — дискретна випадкова величина, що набуває значень з множини чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через $p_k = P\{X = x_k\}$ позначимо ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення x_k, $p_k \geq 0$. Випадкові події $\{X = x_k\}$, $k = \overline{1,n}$, утворюють повну групу подій, тому $\sum_{k=1}^{n} p_k = p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Означення 5.4. *Законом розподілу ймовірностей (або просто законом розподілу) дискретної випадкової величини називається відповідність між всіма її можливими значеннями та їх імовірностями.*

Табличний запис закону розподілу — це таблиця значень x_k випадкової величини та відповідних імовірностей p_k:

X	x_k	x_1	x_2	...	x_n
P	p_k	p_1	p_2	...	p_n

За допомогою табличного запису закону розподілу можна обчислити функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X за формулою:

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_k < x} p_k,$$

у якій підсумовування відбувається за усіма індексами k, для яких $x_k < x$. У випадку, коли множина різних значень x_k випадкової величини X є нескінченною і зліченною, то її закон розподілу також можна записати у формі таблиці, яка складатиметься з двох нескінченних рядків:

$$x_k : x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad \text{і}$$

$$p_k : p_1 = P\{X = x_1\}, p_2 = P\{X = x_2\}, \ldots, p_n = \{X = x_n\}, \ldots,$$

до того ж $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Графік типової функції розподілу дискретної випадкової величини наведено на Рис.1.

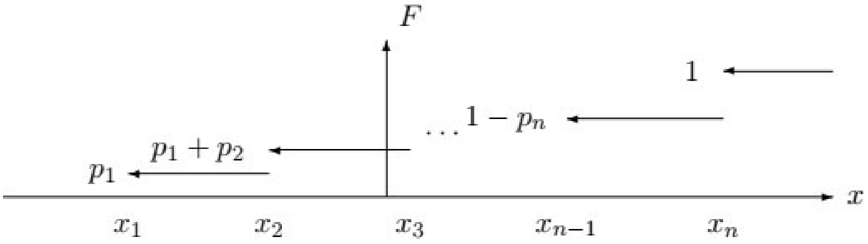

Рис. 1: Графік типової функції розподілу дискретної в. в.

Приклад. У новорічній лотереї розігрується 2 виграші по 1000 грн, 10 виграшів по 100 грн і 100 виграшів по 10 грн. Загальна кількість білетів лотереї дорівнює 10000. Визначити закон розподілу випадкової величини X, яка є виграшем на один лотерейний білет.

Розв'язання. Можливими значеннями дискретної випадкової величини X є числа $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$, $x_3 = 10$, $x_4 = 0$. Їхні ймовірності обчислюються за формулою: $p_k = \frac{n_k}{n}$, де n_k — кількість виграшних білетів на певну суму гривень, n — кількість всіх білетів лотереї. Отримуємо:

$$p_1 = \frac{2}{10000} = 0,0002, \quad p_2 = \frac{10}{10000} = 0,001, \quad p_3 = \frac{100}{10000} = 0,01;$$

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 1 - (0,0002 + 0,001 + 0,01) = 0,9888.$$

Закон розподілу випадкової величини X наведемо у вигляді таблиці:

$X = x_k$	1000	100	10	0
$P = p_k$	0,0002	0,001	0,01	0,9888

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задається таблицею:

$X = x_k$	-2	1	4	6
$P = p_k$	0,2	0,1	0,3	0,4

Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

Розв'язання. Коли $x \leq -2$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0$, бо подія $\{X < x\}$ є неможливою.

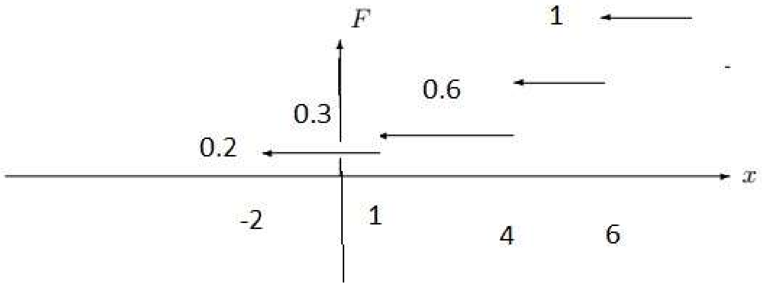

Рис. 2: Графік функції розподілу

Якщо $-2 < x \leq 1$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0,2$, оскільки подія $\{X < x\}$ є рівносильною події $\{X = -2\}$, що має ймовірність 0,2.
Коли $1 < x \leq 4$, то $F(x) = P\{X < x\}$= 0,2+ 0,1= 0,3, оскільки подія {X <x} є сумою двох несумісних подій: $\{X = -2\}$, ймовірність якої дорівнює 0,2, і $\{X = 1\}$, яка має ймовірність 0,1.
Якщо $4 < x \leq 6$, то $F(x) = P\{X < x\} = 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6$, оскільки подія $\{X < x\}$ є сумою трьох несумісних подій: $\{X = -2\}$, ймовірність якої дорівнює 0,2, $\{X = 1\}$, ймовірність якої – 0,1 і $\{X = 4\}$, яка має ймовірність 0,3.
Якщо $x > 6$, то $F(x) = P\{X < x\} = 1$, оскільки подія {X < x} є вірогідною. Отже, функцію розподілу заданої дискретної випадкової величини можна записати у вигляді:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ 0,2, & -2 < x \leq 1; \\ 0,3, & 1 < x \leq 4; \\ 0,6, & 4 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової величини має ”східчастий” характер і наведено на Рис.2.

Неперервний розподіл. Властивості щільності розподілу ймовірностей

На початку лекції ми назвали неперервною випадковою величиною випадкову величину

X, для якої значення суцільно заповнюють деякий скінченний або нескінченний проміжок на числовій прямій. Формалізуємо щойно наведене означення. Оскільки множина можливих значень неперервної випадкової величини незлічення, то для неї неприпустима характеристика розподілу у формі переліку її значень та відповідних імовірностей, оскільки елементи цієї множини неможливо записати як послідовність. Тому характеристика розподілу такої величини базується виключно на понятті функції розподілу.

Означення 5.5. *Випадкова величина X називається неперервною (або абсолютно неперервною), якщо існує невід'ємна функція $f(x)$ така, що для всіх x функція розподілу випадкової величини X визначається у вигляді*

$$F(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \tag{16}$$

до того ж функція $f(x)$ неперервна всюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок.

З означення (16) випливає, що функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною, оскільки інтеграл – неперервна функція верхньої межі інтегрування. Функція $f(x)$ називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X. У точках неперервності функції $f(x)$ її можна обчислювати як похідну функції розподілу: $f(x) = F'(x)$. Із співвідношення (16), означення щільності розподілу та властивості функції розподілу, можна також визначити властивості щільності:

1) $f(x) \geq 0$ для довільних $x \in \mathbf{R}$.

2) $P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(u)du - \int_{-\infty}^{a} f(u)du = \int_{a}^{b} f(u)du.$

Доведення. З неперервності функції розподілу неперервної випадкової величини випливає, що $P\{X = x\} = F(x+0) - F(x) = 0$. Тому для неперервної випадкової величини X:

$$P\{a < X < b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X \leq b\} = \int_{a}^{b} f(u)du.$$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1.$

Доведення. З того, що $F(+\infty) = 1$, з (16) і другої властивості для щільності розподілу, отримуємо необхідну рівність.

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.