Probability Theory

Chapter 2

Numerical characteristics of random variables.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 6. Числові характеристики випадкових величин.

Мода і медіана

Почнемо з опису форми розподілу. Для опису форми розподілу ймовірностей використовують такі характеристики як мода й медіана.

Означення 6.1. *Модою Mo випадкової величини називають таке значення x, при якому*

$$f(x) = \max .$$

Означення 6.2. *Медіаною Me випадкової величини називають таке число $x = Me$, для якого*

$$P(X < Me) = P(X > Me),$$

тобто для якого площі під кривою щільності ймовірності зліва й справа співпадають.

Оскільки вся площа, обмежена щільністю розподілу й віссю OX, дорівнює 1, то функція розподілу в точці, яка відповідає медіані, дорівнює 0,5:

$$F(Me) = P(X < Me) = 0,5.$$

Бувають розподіли одномодальні, двохмодальні й багатомодальні. Зустрічаються також розподіли, які мають мінімум, але не мають максимуму. Такі розподіли називають антимодальними.

Приклад. Робітник під час зміни обслуговує три верстати. Імовірність того, що верстат потребує нагляду робітника за годину, — величина стала і дорівнює 0,8.

Побудуйте закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа верстатів, що потребують нагляду робітника за годину. Знайдіть Мо.

Розв'язання.

Запишемо можливі значення випадкової величини:

$X = 0, 1, 2, 3.$

Відповідні ймовірності цих значень наступні:

$p_1 = q^3 = (0,2)^3 = 0,008;$

$p_2 = 3pq^2 = 3 \cdot 0,8 \cdot 0,04 = 0,096;$

$p_3 = 3p^2q = 3 \cdot 0,64 \cdot 0,2 = 0,384;$

$p_4 = p^3 = (0,8)^3 = 0,512.$

Зведемо у таблицю цей закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Із таблиці визначаємо $Mo = 3$.

Отже, цей розподіл буде одномодальним.

Приклад. Заданано щільність ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ a\ (x+2)(x-4), & -2 < x \le 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Обчисліть a і $F(x)$, Mo.

Розв'язання.

Використаємо умову нормування щільності розподілу:

$$a = \frac{1}{\int_{-2}^{4} (x+2)(x-4)dx}$$

$$\int_{-2}^{4} x^2dx - 2\int_{-2}^{4} xdx - 8\int_{-2}^{4} dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{4} - x^2\Big|_{-2}^{4} - 8x|_{-2}^{4} =$$
$$= \frac{64+8}{3} - (16-4) - 8(4+2) = 24 - 12 - 48 = -36 \ \Rightarrow a = -\frac{1}{36}.$$

Тепер можна записати щільність розподілу, використавши знайдене a:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{(4-x)(x+2)}{36}, & -2 < x < 4; \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

маємо $f(1) = \max$. Таким чином, Mo $= 1$.

Визначаємо Me:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(x)dx = \frac{1}{36}\int_{-2}^{x}(4-x)(x+2)dx =$$
$$= \frac{1}{36}\int_{-2}^{x}(8+2x-x^2)dx = \frac{1}{36}\left(\int_{-2}^{x} 8dx + \int_{-2}^{x} 2xdx - \int_{-2}^{x} x^2dx\right) =$$
$$= \frac{1}{36}\left(8x|_{-2}^{x} + x^2\Big|_{-2}^{x} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{x}\right) = \frac{1}{36}\left(8x + 16 + x^2 - 4 - \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{36}\left(\frac{24x + 36 + 3x^2 - x^3 - 8}{3}\right) = \frac{28 + 24x + 3x^2 - x^3}{108}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{28+24x+3x^2-x^3}{108}, & -2 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Для обчислення Me застосовуємо означення:

$$F(\mathrm{Me}) = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{28+24\mathrm{Me}+3\mathrm{Me}^2-\mathrm{Me}^3}{108} = \tfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow$$
$$\mathrm{Me}^3 - 3\mathrm{Me}^2 - 24\mathrm{Me} + 26 = 0 \Longrightarrow \mathrm{Me} = 1.$$

Me можна знайти, скориставшись виглядом щільністі розподілу ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx, \tag{17}$$

або при $X \in [a;\ b]$:

$$\int_a^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^b f(x)dx. \tag{18}$$

Математичне сподівання

Основну інформацію про випадкову величину містить її функція розподілу. Але іноді зручніше використовувати числа, які характеризують випадкову величину сумарно і називаються числовими характеристиками цієї величини. Розглянемо найголовніші.

Нехай X — дискретна випадкова величина, яка може приймати значення $x_1, x_2, \ldots,$ відповідно з імовірностями $p_1, p_2, \ldots$.

Означення 6.3. *Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називають число*

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \tag{19}$$

якщо ряд у правій частині абсолютно збіжний. Коли ряд (19) не збігається абсолютно, то вважають, що математичне сподівання не існує.

Відмітимо, що у випадку скінченної кількості можливих значень дискретної випадкової величини її математичне сподівання існує завжди:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

Щоб розтлумачити ймовірнісний зміст математичного сподівання, розгляньмо **приклад**.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина X може набувати значення з множини $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Припускаємо, що значення x_1 зустрічається n_1 разів, значення x_2 – n_2 разів, ..., значення x_k зустрічається n_k разів. Тоді середнє арифметичне значень випадкової величини X в n випробуваннях обчислимо за формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + \ldots + x_k n_k) = x_1 \frac{n_1}{n} + \ldots + x_k \frac{n_k}{n}.$$

Число $\frac{n_i}{n}$ — це відносна частота події $\{X = x_i\}$. У випадку, коли кількість випробувань n — число досить велике, то $\frac{n_i}{n} \approx p_i = P\{X = x_i\}$. Тому і середнє арифметичне $\overline{x}$ буде в цьому випадку наближатися до математичного сподівання $E[X]$:

$$\overline{x} \approx x_1p_1 + \ldots + x_kp_k = E[X].$$

Таким чином, імовірнісне тлумачення математичного сподівання полягає в наступному: математичне сподівання наближено дорівнює (тим точніше, чим більша кількість випробувань n) середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини X.

Нехай X — неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$.

Означення 6.4. *Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається число*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{20}$$

якщо інтеграл у правій частині абсолютно збіжний. У випадку, коли інтеграл (20) не збігається абсолютно, то вважають, що математичне сподівання не існує.

Відмітимо, що у випадку, коли значення неперервної випадкової величини зосереджені на проміжку (a, b), її математичне сподівання

$$E[X] = \int_{a}^{b} xf(x)dx,$$

завжди існує. Оскільки в точках неперервності функції $f(x)$ маємо: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, то формулу (20) можна переписати у вигляді:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x), \tag{21}$$

Властивості математичного сподівання

1) Якщо X — неперервна випадкова величина з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$, а $g(x)$ — неперервна функція на множині можливих значень X, то

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx. \tag{22}$$

Якщо X — дискретна випадкова величина з законом розподілу

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

то

$$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k. \tag{23}$$

Приклад. Проілюструємо формулу (22) для випадкової величини $Y(X) = X^3$. Маємо:

$$F_Y(x) = P\{Y < x\} = P\{X^3 < x\} = P\{X < \sqrt[3]{x}\} = F_X(\sqrt[3]{x}).$$

Згідно формули (21)

$$E[Y] = E[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF_X(\sqrt[3]{x}),$$

або після заміни $y = \sqrt[3]{x}$, $x = y^3$:

$$E[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 dF_X(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f(y)dy.$$

2) Математичне сподівання константи дорівнює самій константі, тобто $C = const$, то $E[C] = C$.

Доведення. Константу C вважаємо дискретною випадкою величиною, яка набуває лише одного значення C з імовірністю 1. Тому $E[C] = C \cdot 1 = C$.

3) Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання, тобто якщо $C = const$, то $E[CX] = CE[X]$.

Доведення випливає безпосередньо із співвідношень (22) і (23).

4) Математичне сподівання алгебраїчної суми двох (або кількох) випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин, тобто $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$.

Приклад. Знайти математичне сподівання кількості успіхів μ та частоти успіхів μ/n в n випробуваннях Бернуллі, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p і $q = 1 - p$.

Розв'язання. Позначимо через μ_k кількість успіхів у випробуванні під номером k. Звідси, $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, $E[\mu_k] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, оскільки кількість успіхів в одному випробуванні дорівнює 1 з імовірністю p або 0 з імовірністю q. Звідси,

$$E[\mu] = E[\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n] = E[\mu_1] + E[\mu_2] + \ldots + E[\mu_n] = np.$$

$$E\left[\frac{\mu}{n}\right] = \frac{1}{n}E[\mu] = \frac{np}{n} = p.$$

5) Якщо випадкові величини X і Y - незалежні, тоді $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини наведено у таблиці:

x_i	– 6	– 4	2	4	6	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

Знайдіть $E[X]$.

Розв'язання. Скориставшись 19, отримаємо

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6 = \\ &= -6 \cdot 0,1 - 4 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 = \\ &= -0,6 - 0,4 + 0,4 + 1,2 + 0,6 + 1,6 = 2,8. \end{aligned}$$

Приклад Задано щільність ймовірностей випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \frac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}, & -1 < x \le 7; \\ 0, & x > 7 \end{cases}$$

знайдіть $E[X]$.

Розв'язання. Відповідно до 20:

$$E[X] = \int_{-1}^{7} x\,f(x)dx = \int_{-1}^{7} x\frac{1}{12}\ \sqrt[3]{x+1}\ dx = \frac{1}{12}\int_{-1}^{7} x\ \sqrt[3]{x+1}\ dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x+1 = z^3 & \\ x = z^3 - 1 & -1 \le x \le 7 \\ dx = 3z^2dz & 0 \le z \le 2 \end{array} \right| = \frac{1}{12}\ \int_0^2 (z^3-1)\ z\ \cdot\ 3z^2dz =$$

$$= \frac{1}{4}\ \int_0^2 (z^6 - z^3)dz = \frac{1}{4}(\int_0^2 z^6dz - \int_0^2 z^3dz) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{z^7}{7}\bigg|_0^2 - \frac{z^4}{4}\bigg|_0^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{128}{7} - 4\right) = \frac{1}{4}\ \frac{128-28}{7} = \frac{100}{28} = \frac{25}{7};$$

$$E[X] = \frac{25}{7}.$$

Приклад. Задано щільність імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{3}\ \sin\frac{2}{3}x, & 0 < x \le \frac{3}{2}\pi; \\ 0, & x > \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Знайдіть $E[X]$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\ f(x)dx = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{x}{3}\ \sin\frac{2}{3}xdx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\ \sin\ \frac{2}{3}xdx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ \sin\frac{2}{3}xdx = dv \\ v = -\frac{3}{2}\cos\ \frac{2}{3}x \end{array} \right| = \frac{1}{3}\left(-\ \frac{3x}{2}\ \cos\ \frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} + \frac{3}{2}\ \int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos\ \frac{2}{3}xdx\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\ x\ \cos\ \frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} + \ \frac{9}{4}\ \sin\ \frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}\right) = \frac{3}{4}\pi\ . \\ E[X] &= \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

Приклад. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \frac{\sqrt{x+3}}{3}, & -3 < x \le 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Знайдіть $E[X]$.

Розв'язання. Для того, щоб обчислити $E[X]$, знайдімо щільність імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ \frac{1}{6\sqrt{x+3}}, & -3 < x \le 6; \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Таким чином,

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-3}^{6} x\ f(x)dx = \int_{-3}^{6} \frac{x}{6\sqrt{x+3}}dx = \frac{1}{6}\int_{-4}^{6} \frac{x}{\sqrt{x+3}}\ dx = \\
&= \left| \begin{array}{ll} x+3 = z^2 & \\ x = z^2-3 & \begin{array}{c} -3 \le x \le 6 \\ 0 \le z \le 3 \end{array} \\ dx = 2zdz & \end{array} \right| = \frac{1}{6}\ \int_0^3 \frac{z^2-3}{z} \cdot 2zdz = \\
&= \frac{1}{3}\ \ \int_0^3 (z^2-3)dz = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 z^2dz - 3\ \ \int_0^3 dz\right) = \\
&= \frac{1}{3}\ \left(\frac{z^3}{3}\Big|_0^3 -\ \ 3z|_0^3 \right) = \frac{1}{3}\ (9-9) = 0; \\
E[X] &= 0.
\end{aligned}
$$

Якщо випадкова величина $X \in [a;\ b]$, то $E[X] \in [a;\ b]$, а саме: математичне сподівання випадкової величини обов'язково міститься всередині інтервалу $[a;\ b]$ і представляє собою центр розподілу цієї величини.

Дисперсія

Дисперсія — це числова характеристика випадкової величини, яка характеризує відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Для характеристики цього відхилення неможливо використовувати його математичне сподівання, оскільки воно дорівнює нулю:

$$E[X - E[X]] = E[X] - E[E[X]] = E[X] - E[X] = 0.$$

Цей результат цілком логічний. Він вказує на те, що випадкова величина "однаково часто" відхиляється від свого математичного сподівання як у більшу, так і в меншу сторону. Щоб унеможливити взаємне знищення додатних і від'ємних значень відхилення $X - E[X]$, можна замість відхилення розглядати його квадрат $(X - E[X])^2$.

Означення 6.5. *Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, тобто*

$$D(X) = E[(X - E[X])^2].$$

З властивостей математичного сподівання випливає, що дисперсію дискретної і нерерервної випадкових величин можна обчислювати відповідно за формулами:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - E[X])^2 p_k, \qquad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E[X])^2 f(x)dx.$$

При використанні дисперсії для характеристики розсіювання випадкової величини, виникає незручність: якщо випадкова величина вимірюється в деяких одиницях, то дисперсія вимірюється у квадратах цих одиниць. Тому природньо мати характеристику розсіювання значень випадкової величини тієї ж розмірності, що й сама величина. Такою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Означення 6.6. *Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається корінь квадратний із дисперсії $D(X)$, тобто*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Властивості дисперсії.

1) Дисперсія довільної випадкової величини невід'ємна: $D(X) \geq 0$.

Доведення. Дисперсія — це математичне сподівання невід'ємної випадкової величини $(X - E[X])^2$.

2) Дисперсія константи дорівнює нулю, тобто якщо $C = const$, то $D(C) = 0$.

Доведення.

$$D(C) = E[(C - E[C])^2] = E[(C - C)^2] = E[0] = 0.$$

3) Константа виноситься у квадраті за знак дисперсії, тобто якщо $C = const$, то $D(CX) = C^2 D(X)$.

Доведення.

$$D(CX) = E[(CX - E[CX])^2] = E[(CX - CE[X])^2] = E[C^2(X - E[X])^2] =$$

$$= C^2 E[(X - E[X])^2] = C^2 D(X).$$

4) Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї величини і квадратом її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Доведення.

$$D(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] =$$

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2.$$

5) Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Доведення. Для незалежних випадкових величин X і Y: $E[XY] = E[X]E[Y]$, тому

$$D(X+Y) = E[(X+Y)^2] - (E[X+Y])^2 = E[(X^2 + 2XY + Y^2)] - (E[X] + E[Y])^2] =$$

$$= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - (E[X])^2 - 2E[X]E[Y] - (E[Y])^2 =$$

$$= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = D(X) + D(Y).$$

6) Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин, тобто $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

7) Якщо кожна з випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не залежить від суми попередніх, то дисперсія суми цих величин дорівнює сумі їхніх дисперсій, тобто $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

Доведення. Достатньо застосувати метод математичної індукції і скористатися тим, що дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

8) Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — попарно незалежні, то дисперсія суми цих величин дорівнює сумі їхніх дисперсій: $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

Доведення. Достатньо повторити міркування, наведені у доведенні властивості $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, замінивши у ньому формули квадрата суми двох доданків на формули квадрата суми n доданків.

Моменти випадкових величин

Математичне сподівання і дисперсія характеризують найголовніші параметри розподілу випадкових величин: середнє значення та ступінь розсіювання можливих значень величини навколо середнього значення. Але крім цих характеристик, у теорії ймовірностей застосовуються ще й інші числові характеристики, кожна з яких характеризує випадкову величину з позиції певних особливостей її розподілу. Серед них особливе місце займають початкові і центральні моменти, а також асиметрія та ексцес.

Означення 6.7. *Початковим моментом k-го порядку випадкової величини називають математичне сподівання величини X^k і позначають ν_k:*

$$\nu_k = E[X^k].$$

I, $\nu_1 = E[X]$, $\nu_2 = E[X^2]$, а для знаходження дисперсії маємо наступну формулу: $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Означення 6.8. *Центральним моментом k-го порядку випадкової величини називають математичне сподівання величини $(X - E[X])^k$ і позначають μ_k:*

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k].$$

Зокрема,

$$\mu_1 = E[(X - E[X])] = E[X] - E[X] = 0, \quad \mu_2 = E[(X - E[X])^2] = D(X).$$

Між початковими і центральними моментами існує зв'язок:

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = E[(X - \nu_1)^k];$$

$$\mu_2 = E[(X - \nu_1)^2] = E[(X^2 - 2\nu_1 X + \nu_1^2)] = \nu_2 - 2\nu_1^2 + \nu_1^2 = \nu_2 - \nu_1^2;$$

$$\mu_3 = E[(X - \nu_1)^3] = E[(X^3 - 3\nu_1 X^2 + 3\nu_1^2 X - \nu_1^3)] = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 3\nu_1^3 - \nu_1^3 =$$

$$= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Для дискретної випадкової величини , що приймає значення x_i із імовірностями p_i:

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p_i, \qquad \mu_k = \sum_i (x_i - E[X])^k p_i.$$

Для неперервної випадкової величини , що має щільність розподілу $f(x)$:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, \qquad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^k f(x)dx.$$

Означення 6.9. *Асиметрією випадкової величини X назвемо число A_s, яке обчислюється за формулою:*

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}.$$

Звідси випливає, що напрям асиметрії випадкової величини характеризується центральним моментом μ_3, який має розмірність куба випадкової величини. У випадку, коли $\mu_3 = 0$, випадкова величина розподілена симетрично відносно математичного сподівання $E[X]$. Якщо $\mu_3 < 0$ ($\mu_3 > 0$), тоді розподіл випадкової величини X має від'ємну (додатну) асиметрію. Коефіцієнт асиметрії A_s немає розмірності. Він використовується для оцінки напрямку й сили асиметрії розподілу випадкової величини.

Означення 6.10. *Ексцесом випадкової величини X назвемо число E_k, що визначається рівністю:*

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3.$$

Ексцес E_k, як і коефіцієнт асиметрії A_s, немає розмірності. Він характеризує "гостровершинність" графіка щільності розподілу випадкової величини в порівнянні з щільністю нормального розподілу

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Для нормального розподілу ексцес $E_k = 0$; криві, що є більш гостровершинні, порівнюючи з нормальною, мають ексцес $E_k < 0$, менш гостровершинні — $E_k > 0$.

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.