Probability Theory

Chapter 2

Continuous probability distributions.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 8. Абсолютно неперервні ймовірнісні розподіли.

Рівномірний розподіл.

Нехай на деякий відрізок $[a, b]$ навмання кидають точку. Очевидно, що ймовірність влучання точки у певну частину відрізку буде пропорційною довжині цієї частини проміжку. Випадкову величину визначимо як координату точки попадання:

$$X(\omega) = \omega, \qquad \omega \in [a, b].$$

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини X.

Якщо $x \le a$, то $F(x) = P\{X < x\} = P(\emptyset) = 0$.

Якщо $x \in (a, b]$, то $F(x) = P\{X < x\} = c(x - a)$ (ймовірність пропорційна довжині проміжка $[a, x)$). Таким чином,

$$F(b) = P\{X < b\} = P(\Omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b - a}.$$

Отже, рівномірний розподіл визначається функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

яка, є неперервною. Щільність розподілу ймовірностей можна визначити як похідну функції розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Перевіримо, чи це дійсно буде розподіл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = 1.$$

Математичне сподівання.

Щільністю випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$, буде:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

тоді, за означенням математичного сподівання абсолютно неперервної випадкової величини:

$$E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

З цього випливає, що математичне сподівання випадкової величини X, рівномірно розподіленої на проміжку $[a, b]$, є серединою цього відрізка.

Дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини.

$$E[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

$$D(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Показниковий розподіл.

На практиці часто трапляються випадкові величини, що мають показниковий розподіл. Вони виникають,наприклад, у задачах про визначення ймовірності безперервної роботи приладу.

Означення 8.1. *Неперервна випадкова величина X називається розподіленою за показниковим законом або показниково розподіленою з параметром λ, якщо щільність розподілу її ймовірностей має вигляд:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

де $\lambda > 0$ — параметр розподілу.

Перевіримо, що це дійсно розподіл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Оскільки для $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u} du = -e^{-\lambda u}|_0^{x} = -e^{-\lambda x} - (-1) = 1 - e^{-\lambda x},$$

то відповідна функція розподілу дорівнює:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

Знайдемо ймовірність попадання значень показниково розподіленої випадкової величини у заданий проміжок:

$$P\{a < X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_a^{b} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}. \tag{25}$$

Лише показниковому закону розподілу серед неперервних випадкових величин властива ознака відсутності післядії, а саме: якщо випадкова величина пов'язана з часом, то для показникового закону розподілу минуле не буде впливати на настання подій у майбутньому. Наприклад, якщо випадкова величина T — тривалість безперервної роботи приладу має показниковий розподіл, то час роботи приладу впродовж інтервалу часу $(0, t_0)$ не впливає на значення ймовірності його безвідмовної роботи впродовж наступного інтервалу часу $(t_0, t_0 + t)$, а залежить лише від довжини t цього інтервалу.

Приклад. Час безвідмовної роботи деякого приладу – показниково розподілена випадкова величина T з параметром $\lambda = 0,02$. обчисліть ймовірність того, що прилад буде працювати безвідмовно не менше ніж 100 год.

Розв'язання. За формулою (525) знаходимо:

$$P\{T \geq 100\} = P\{100 \leq T < \infty\} = P\{100 < T < \infty\} = e^{-0,02 \cdot 100} - e^{-\infty} = e^{-2} \approx 0,1353.$$

Обчислимо числові характеристики випадкової величини розподіленої за показниковим розподілом.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{vmatrix} x = u & dx = du \\ \lambda e^{-\lambda x} dx = dv & -e^{-\lambda x} = v \end{vmatrix} =$$

$$= -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{vmatrix} x^2 = u & 2xdx = du \\ \lambda e^{-\lambda x}dx = dv & -e^{-\lambda x} = v \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2 e^{-\lambda x} + 2\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x} - \frac{2xe^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{2e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Логістичний розподіл.

Цей розподіл широко використовується в економіці, біології, психометриці, в Data Science. Функція розподілу випадкової величини з даним розподілом має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{-(x-a)}{b}}}.$$

Очевидно, що ця функція — неперервна, отже існує щільність імовірності, яка визначається формулою:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-(x-a)}{b}}}{b\left(1 + e^{\frac{-(x-a)}{b}}\right)^2}.$$

Знайдемо числові характеристики випадкової величини.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{\frac{-(x-a)}{b}}}{b\left(1 + e^{\frac{-(x-a)}{b}}\right)^2} dx = \left| \frac{x-a}{b} = t, \qquad dx = bdt \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(bt+a)e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bte^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ae^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt.$$

Оскільки функція $g(t) = \frac{ae^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$ – парна, а $tg(t)$ – непарна, то

$$E[X] = 2\int_0^{\infty} \frac{ae^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = -2a\int_0^{\infty} \frac{de^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{2a}{1+e^{-t}}\Bigg|_0^{\infty} = a.$$

$$D(X) = \frac{\pi^2 b^2}{3}.$$

Нормальний розподіл.

Виняткову роль у теорії ймовірностей відіграє нормальний розподіл (закон Гаусса). Він проявляється у всіх випадках, коли випадкова величина X є результатом впливу значної кількості різних випадкових факторів, кожен з яких окремо має на величину X несуттєвий вплив.

Означення 8.2. *Неперервна випадкова величина X називається нормально розподіленою з параметрами $-\infty < a < \infty$ і $\sigma > 0$, якщо її щільність розподілу має вид:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right).$$

Перевіримо для нормального розподілу основну властивість щільності розподілу. Для цього в інтегралі

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) dx$$

замінимо $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$. Тоді $x = t\sigma\sqrt{2} + a$; $dx = \sqrt{2}\sigma dt$ і, враховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \tag{26}$$

отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

Зауваження 8.1. *Рівність (26) можна отримати з інтегралу Ейлера-Пуассона: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Розглянемо один з існуючих способів обчислення такого інтегралу.*

Розв'язання. Позначимо $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Тоді

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy =$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = \rho\cos\phi, & y = \rho\sin\phi \\ dxdy = \rho d\rho d\phi & \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \int_0^\infty e^{-\rho^2} d(\rho^2) = -\frac{\pi}{4} e^{-\rho^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

З чого випливає, що $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Знайдемо ймовірність потрапляння значень нормально розподіленої випадкової величини у заданий інтервал. Для цього в інтегралі

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) dx$$

замінимо $t = \frac{x-a}{\sigma}$. Таким чином, $x = \sigma t + a$; $dx = \sigma dt$ і, врахувавши, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(b) - \Phi(a),$$

отримаємо:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Таким чином:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{27}$$

Оскільки для значень функції $\Phi(x)$ створено таблицю, то формула (27) є зручною для обчислень. Якщо покласти $\alpha = a - \epsilon$, $\beta = a + \epsilon$, то з (27) одержимо:

$$P\{a - \epsilon < X < a + \epsilon\} = \Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\epsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right),$$

значить,

$$P\{|X - a| < \epsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \tag{28}$$

Покладемо у формулі (28) $\epsilon = 3\sigma$. Отримаємо:

$$P\{|X - a| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973,$$

тобто ймовірність події $\{|X - a| < 3\sigma\}$ дуже близька до одиниці, а з цього випливає, що ця подія майже вірогідна. Отримуємо відоме правило "трьох сигм": якщо випадкова величина нормально розподілена, то майже вірогідно, що абсолютна величина її відхилення від параметра a не перевищує потроєного параметра σ.

Математичне сподівання та дисперсія нормально розподіленої випадкової величини.

Знайдемо математичне сподівання нормальної випадкової величини . Для цього в інтегралі

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) dx$$

замінимо $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$. Тоді $x = t\sigma\sqrt{2} + a$; $dx = \sqrt{2}\sigma dt$ і, врахувавши, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt = 0,$$

отримаємо:

$$E[X] = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma\sqrt{2} + a)e^{-t^2} dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = a.$$

Дисперсію знайдемо за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (x-a)^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) dx.$$

Знову замінимо $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$ і проінтегруємо частинами, поклавши $t = u$, $2te^{-t^2}dt = dv$:

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} (0 + \sqrt{\pi}) = \sigma^2.$$

Таким чином, математичне сподівання і дисперсія нормально розподіленої випадкової величини відповідно дорівнюють a і σ^2, тобто виражаються через параметри цього розподілу. Середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини дорівнює параметрові σ цього розподілу:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma.$$

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.